

Analysis 1 - Wintersemester 2023

Prof. Dr. Duc Viet Vu, Dr. Martin Schwald

Herausgeber: Albert Marks (amarks2@smail.uni-koeln.de)

Inhaltsverzeichnis

0	Grundbegriffe	1
0.1	Mengen	1
0.2	Logik	2
0.3	Abbildungen	3
1	Die reellen Zahlen	4
1.1	Die Körperaxiome	6
1.2	Ordnungsaxiome	8
1.3	Vollständigkeitsaxiom	11
1.4	Natürliche Zahlen und vollständige Induktion	13
1.5	Folgerungen des Vollständigkeitsaxioms	20
1.6	Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$	26
1.7	Der Körper der komplexen Zahlen	28
2	Folgen und Konvergenz	31
2.1	Definition und Beispiele	31
2.2	Rechnen mit konvergenten Folgen	36
2.3	Der Satz von Bolzano-Weierstraß und das Cauchy-Kriterium	38
2.4	Folgen komplexer Zahlen	42
3	Reihen	46
3.1	Definitionen und Beispiele	46
3.2	Konvergenzkriterien	46
3.3	Absolute Konvergenz	49
3.4	Potenzreihen	54
4	Stetigkeit und Grenzwerte	57
4.1	Stetige Funktionen	57
4.2	Potenzreihen und Stetigkeit	62
4.3	Der Zwischenwertsatz	64
4.4	Satz von Maximum und Minimum	67
4.5	Fortsetzung stetiger Funktionen und Grenzwerte	69

5	Differenzierbarkeit	75
5.1	Definition und erste Eigenschaften	75
5.2	Mittelwertsätze	79
5.3	Anwendungen des Mittelwertsatzes	82
5.4	Trigonometrische Funktionen	87
6	Integralrechnung	90
6.1	Treppenfunktionen und Riemannsches Integral	90
6.2	Stammfunktionen	100
Index		v

Hinweis

Dies ist ein inoffizielles Skript. Der Vortragende Prof. Vu und der Übungsleiter Dr. Schwald korrigieren nicht den Inhalt dieses Dokuments. Vorschläge bitte an amarks2@smail.uni-koeln.de.

0 Grundbegriffe

Ziel: Wir erinnern grundlegende Begriffe von Mengenlehre, Logik und Abbildungen.

Woche 1

0.1 Mengen

Eine Menge ist eine ungeordnete Zusammenfassung von Objekten, genannt Elemente. Man kann Mengen auf verschiedene Arten definieren:

(a) Durch Auszählung ihrer Elemente:

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen,

wobei „ $:=$ “ ist definiert als „heißt“.

$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ die Menge ganzer Zahlen

(b) Durch Angabe der Eigenschaften ihrer Elemente:

$M := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ungerade}\}$

Notation.

$x \in M$: x ist Element der Menge M .

$x \notin M$: x ist nicht Element der Menge M .

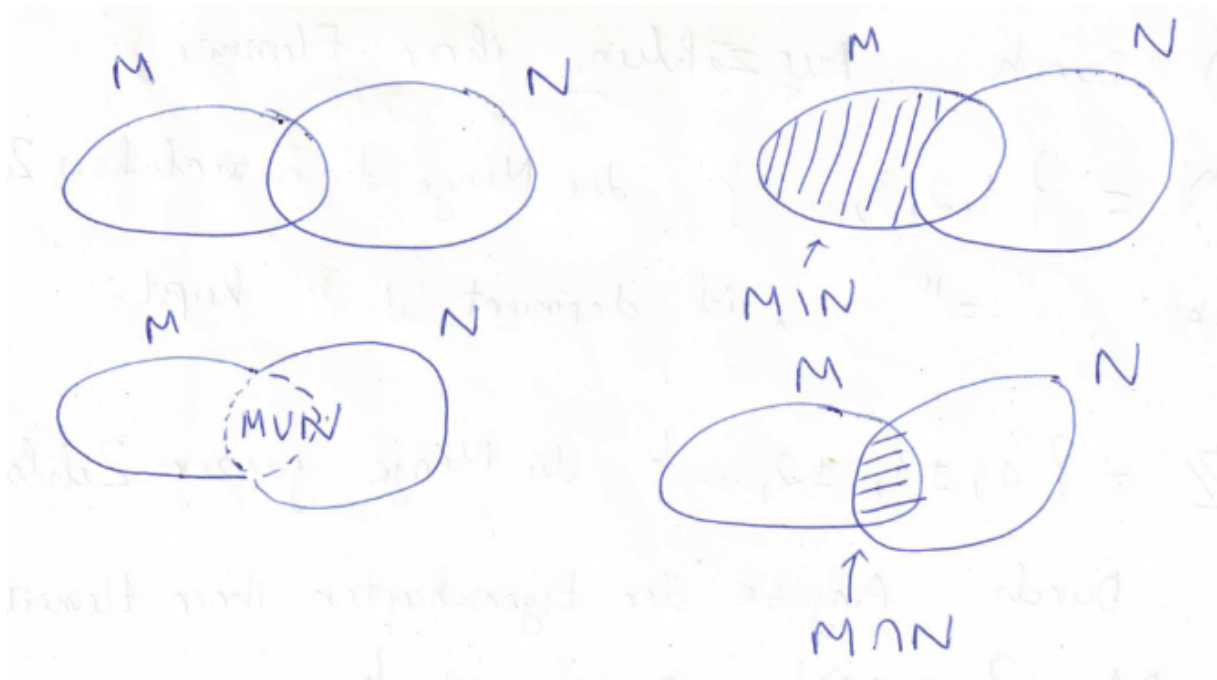
$\emptyset := \{\}$: leere Menge, d.h. die Menge, die keine Elemente enthält.

Definition. Es seien M, N Mengen.

$M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$ Vereinigungsmenge von M und N

$M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$ Schnittmenge von M und N

$M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$ Differenzmenge von M und N



M und N heißen disjunkt, falls $M \cap N = \emptyset$.

0.2 Logik

Eine Aussage ist ein Ausdruck, von dem eindeutig feststeht, ob er wahr (oder richtig), bezeichnet mit w, oder falsch, bezeichnet mit f, ist.

Wir haben die folgende Wahrheitstabelle (A, B Aussagen, w = wahr, f = falsch):

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

$\neg A$ (Negation von A) steht für die Aussage „nicht A “.

A	$\neg A$
w	f
f	w

$A \iff B$: A gilt genau dann, wenn B gilt. A ist äquivalent zu B . $A \implies B$ und $B \implies A$.

Quantoren

$\exists$: es existiert (mindestens ein)

$\exists!$: es existiert genau ein

$\forall$: für alle

Beispiel. Die Aussage

$$\exists x \in \mathbb{Z}: x^2 = 4 \quad (1)$$

heißt: Es gibt mindestens eine ganze Zahl x mit $x^2 = 4$.

$$\exists! x \in \mathbb{Z}: x^2 = 4 \quad (2)$$

heißt: Es gibt genau eine ganze Zahl x mit $x^2 = 4$.

$$\forall x \in \mathbb{Z}: x^2 = 4 \quad (3)$$

heißt für alle ganzen Zahlen x gilt $x^2 = 4$.

Man beachte:

- (1) ist wahr (da $2^2 = 4$)
- (2) ist falsch (da $2^2 = 4$, $(-2)^2 = 4$)
- (3) ist falsch (da $1^2 = 1 \neq 4$)

Bemerkung. Sei M eine Menge. Sei $A(x)$ eine Aussage, die von einer Variablen $x \in M$ abhängt.

a)

$$\neg(\forall x \in M: A(x)) \iff \exists x \in M: \neg A(x)$$

b)

$$\neg(\exists x \in M: A(x)) \iff \forall x \in M: \neg A(x)$$

Bemerkung. Seien

$$\forall x \in M \exists y \in N: A(x, y), \quad (4)$$

$$\exists y \in N \forall x \in M: A(x, y). \quad (5)$$

Beachte: (4) und (5) sind unterschiedlich. Z.B.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}: y = x + 1 & \quad (\text{wahr}), \\ \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}: y = x + 1 & \quad (\text{falsch}). \end{aligned} \quad (6)$$

(6) heißt: Es gibt eine natürliche Zahl y , so dass für alle natürlichen Zahlen x gilt $y = x + 1$. Daher beachte man, dass die Reihenfolge der Quantoren eine wichtige Rolle spielt.

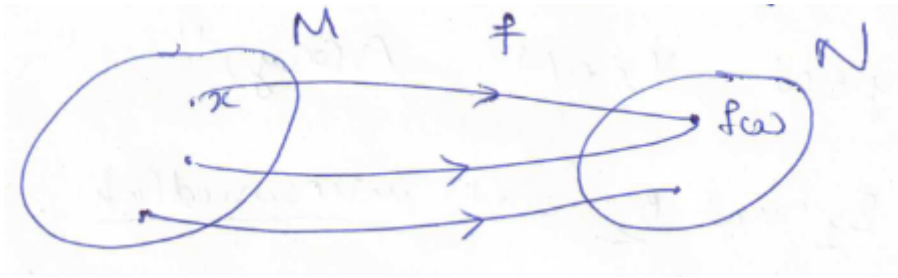
0.3 Abbildungen

Seien M, N Mengen. Das (kartesische) Produkt von M und N ist

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$$

Analog für das Produkt von drei oder mehreren Mengen.

Für $M, N \neq \emptyset$ ist eine Abbildung $F: M \rightarrow N$ eine Vorschrift, die jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zuordnet. Man schreibt $x \mapsto y = f(x)$, M = Definitionsbereich von f , N = Wertebereich von f .



Für $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung: $A \subset M$, $B \subset N$ Teilmengen.

Bild von A unter f :

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subset N$$

Urbild von B :

$$f^{-1}(B) := \{x \in M \mid f(x) \in B\}$$

Einschränkung von f auf A :

$$f|_A: A \rightarrow N, x \mapsto f(x)$$

Graph von f :

$$G_f := \{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\}$$

f heißt injektiv, falls $\forall x, y \in M, x \neq y: f(x) \neq f(y)$.

f heißt surjektiv, falls $\forall y \in N \exists x \in M: f(x) = y$.

f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Z.B.

$$f_1: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x + 1 \quad \text{bijektiv,}$$

$$f_2: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2 \quad \text{weder injektiv noch surjektiv.}$$

1 Die reellen Zahlen

In der Schule ist man schon vertraut mit den folgenden Zahlenbereichen

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{die Menge der natürlichen Zahlen}$$

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad \text{die Menge der ganzen Zahlen}$$

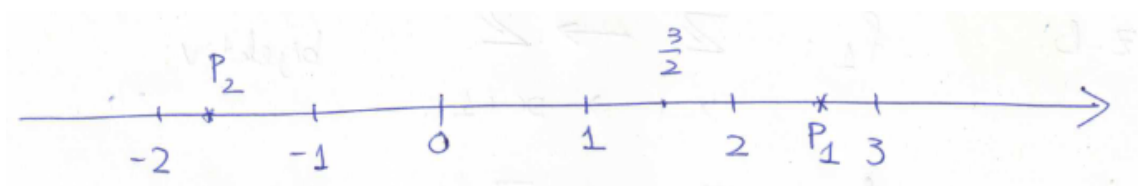
$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

$$\mathbb{R} \quad \text{die Menge der reellen Zahlen}$$

Man hat

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

- Reelle Zahlen kann man intuitiv als Punkte auf der Zahlengeraden auffassen.



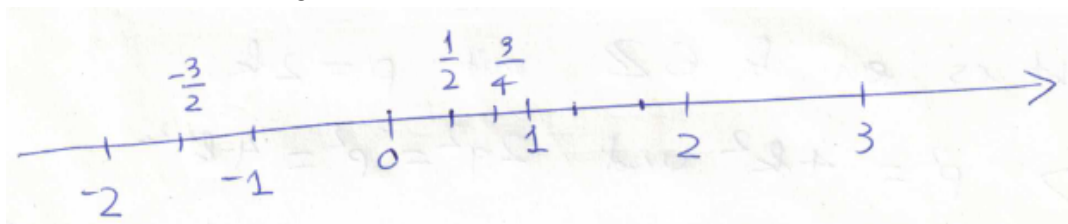
P_1 entspricht der Zahl, die gleich der Länge der Strecke OP_1 ist.

P_2 entspricht der Zahl, die gleich minus der Länge der Strecke OP_2 ist.

- Man bemerkt, dass man in der Schule nur eine *Vorstellung* über die reellen Zahlen hat und die Zahlen noch nicht mathematisch streng definiert wurden.
- Unser Ziel ist es, die reellen Zahlen streng zu definieren und zu untersuchen. Dazu erinnern wir zuerst welche Eigenschaften die reellen Zahlen erfüllen.
 - Man kann reelle Zahlen addieren und multiplizieren.
 - Es gibt eine „Kleiner-Relation“ $x < y$ für $x, y \in \mathbb{R}$:

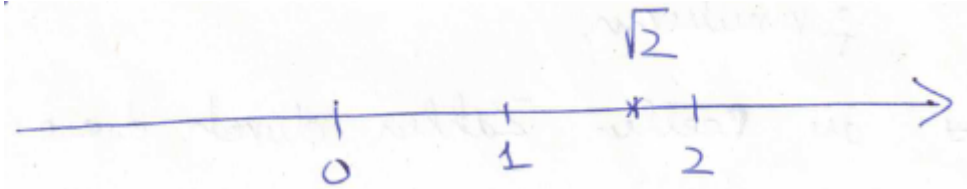


- Die Zahlengerade hat keine „Lücken“. Um das zu sehen betrachten wir die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden:



„Die Menge $\mathbb{Q}$ füllt die Zahlengerade nicht aus“, d.h. es gibt Punkte in der Zahlengerade, die nicht rationale Zahlen sind. Man sagt, die Menge $\mathbb{Q}$ hat „Lücken“.

Beispiel. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



Beweis. Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Dann gibt es $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(p, q) = 1$ (d.h. p, q sind teilerfremd: p, q haben keine gemeinsamen Teiler). und $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Daraus folgt $\frac{p^2}{q^2} = 2$.

Das impliziert $p^2 = 2q^2$.

Daher $2|p^2$ (2 ist ein Teiler von p^2).

Es folgt $2|p$, da 2 eine Primzahl ist. Anders gesagt gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $p = 2k$.

$\Rightarrow p^2 = 4k^2$ und $2q^2 = p^2 = 4k^2$

$\Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q$ ist durch 2 teilbar. Deshalb haben p, q einen gemeinsamen Teiler, welcher 2 ist. Widerspruch! Folglich $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Wir werden nun:

- die obigen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ mathematisch formulieren,
- die reellen Zahlen durch diese Eigenschaften definieren,
- die Zahlenbereiche $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$ wiederfinden. Genauer gesagt führen wir demnächst dem Begriff von Körpern ein, die allgemeiner als $\mathbb{R}$ sind.
Körper erfüllen Eigenschaften wie $\mathbb{R}$, die wir Körperaxiome nennen.

1.1 Die Körperaxiome

Definition 1.1.1. Sei K eine Menge. Seien

$$\begin{array}{ll} +: K \times K \rightarrow K & \cdot: K \times K \rightarrow K \\ (a, b) \mapsto a + b & (a, b) \mapsto a \cdot b \end{array}$$

Abbildungen von $K \times K$ nach K .

Die Abbildung $+$ heißt Addition. $a + b$ heißt die Summe von a und b .

Die Abbildung $\cdot$ heißt Multiplikation. $a \cdot b = ab$ heißt das Produkt von a und b .

K (zusammen mit der Addition und Multiplikation) heißt Körper, wenn die Körperaxiome gelten:

1. Axiome für die Addition

(A1) Für alle $a, b, c \in K$ gilt

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

(A2) Es gibt ein Element $0 \in K$, so dass für alle $a \in K$ gilt

$$a + 0 = a \quad (\text{neutrales Element der Addition oder Nullelement})$$

(A3) Zu jedem $a \in K$ existiert ein additiv inverses Element $(-a) \in K$ mit

$$a + (-a) = 0.$$

(A4) Für alle $a, b \in K$ gilt

$$a + b = b + a \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

2. Axiome für die Multiplikation

(M1) Für alle $a, b, c \in K$ gilt

$$(ab)c = a(bc) \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

(M2) Es gibt ein Element $1 \in K \setminus \{0\}$, so dass für alle $a \in K \setminus \{0\}$ gilt

$$a \cdot 1 = a \quad (\text{neutrales Element der Multiplikation oder Einselement})$$

.

(M3) Zu jedem $a \neq 0 (\in K)$ existiert ein multiplikativ inverses Element $a^{-1} \in K$ mit

$$aa^{-1} = 1.$$

(M4) Für alle $a, b \in K$ gilt

$$ab = ba. \quad (\text{Kommutativgesetz})$$

3. Distributivgesetz

(D) Für alle $a, b, c \in K$ gilt $(a + b)c = ac + bc$.

Wir bezeichnen den Körper K mit $(K, +, \cdot)$.

Beispiel 1.1.2. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind Körper mit der üblichen Addition und Multiplikation.

Satz 1.1.3. (a) Das Nullelement und Einselement sind eindeutig bestimmt.

(b) Für $a, b \in K$ hat die Gleichung $a+x = b$ genau eine Lösung $x = b+(-a)$. Entsprechend hat die Gleichung $ax = b$ für $a \neq 0$ genau eine Lösung $x = a^{-1}b$. Insbesondere ist das zu A additiv (bzw. multiplikativ mit $a \neq 0$) inverse Element eindeutig bestimmt. Man schreibt

$$b - a := b + (-a), \quad \frac{b}{a} \equiv b/a := a^{-1}b.$$

(c)

$$\begin{aligned} -(-a) &= a \\ (-a) + (-b) &= -(a+b) \\ (A^{-1})^{-1} &= A \\ a^{-1}b^{-1} &= (ab)^{-1} \quad (a, b \neq 0) \\ a \cdot 0 &= 0 \\ a(-b) &= -ab \\ (-a)(-b) &= ab \\ a(b-c) &= ab - bc \end{aligned}$$

(d) Aus $ab = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.

Beweis. Zu (a): Sei $0'$ ein weiteres Nullelement. Dann gilt $0 = 0 + 0'$, da $0'$ Nullelement ist, und $0 + 0' = 0'$, da 0 Nullelement ist. Daraus folgt $0 = 0'$.

Zu (b): Man beachte

$$\begin{aligned} &x + a = b \\ \iff &x + \underbrace{a + (-a)}_{=0} = b + (-a) \\ \iff &x + 0 = b + (-a) \\ \iff &x = b + (-a) \end{aligned}$$

Das bedeutet, $b + (-a)$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung $x + a = b$.

Sei $\tilde{a}$ ein weiteres additiv inverses Element von a , d.h. $a + \tilde{a} = 0$. Anders gesagt ist $\tilde{a}$ eine Lösung von $a + x = 0$. Wir wissen schon, dass diese Gleichung genau eine Lösung hat, welche gleich $-a$ ist. Daher gilt $\tilde{a} = -a$. Woche 2

Somit ist das zu a additiv inverses Element eindeutig bestimmt.

Die entsprechende Eigenschaft für die Gleichung $ax = b$ wird analog bewiesen.

Zu (c): Wir zeigen nur die erste Gleichung. Die anderen werden analog bewiesen.

Da $a + (-a) = 0$, ist a eine Lösung von der Gleichung $x + (-a) = 0$. Nach (b) bekommt man $a = -(-a)$.

Wir beweisen nun $a \cdot 0 = 0$. Beachte

$$\begin{aligned} &a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \\ \implies &a \cdot 0 - a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0 \\ \implies &0 = a \cdot 0 \end{aligned}$$

Zu (d): Sei $a, b \in K$ mit $ab = 0$. Ist $a = 0$, dann sind wir fertig.

Ist $a \neq 0$, dann nach (b) gilt $b = a^{-1} \cdot 0 = 0$.

□

Bemerkung. Aus $a \cdot 0 = 0$ gilt $a^{-1} \neq 0$ für $a \neq 0$.

1.2 Ordnungsaxiome

Definition 1.2.1. Ein Körper $(K, +, \cdot)$ heißt total angeordnet, falls eine Teilmenge $P \subset K$ existiert mit den Eigenschaften:

(O1) Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der Beziehungen: $x \in P$, $-x \in P$, $x = 0$.

(O2) Für alle $x, y \in P$ gilt $x + y, xy \in P$. Ist $x \in P$ (bzw. $-x \in P$), so heißt x positiv (bzw. negativ).

In einem total angeordneten Körper K führen wir eine Kleiner-Relation ein:

Seien $x, y \in K$. Wir sagen „ x ist kleiner als y “, geschrieben $x < y$, oder „ y ist größer als x “, geschrieben $y > x$, falls

$$y - x \in P: \quad x < y \iff y - x \in P.$$

(Die Notation „ $\iff$ “ bedeutet: wir sagen $x < y$ genau dann, wenn $y - x \in P$.)

Man beachtet $x \in P \iff x > 0$ und $-x \in P \iff x < 0$.

Satz 1.2.2 (Rechenregeln für Ungleichungen). Sei K ein total angeordneter Körper. Für alle $x, y, z, t \in K$ gilt:

(a) $x < y$ und $y < z \implies x < z$ (Transitivität)

(b) $x < y \implies x + z < y + z$

(c) $x < y \implies -y < -x$

(d) $x < y \wedge z > 0 \implies xz < yz$, $x < y \wedge z < 0 \implies xz > yz$

(e) $x \neq 0 \implies x^2 > 0$. Insbesondere $1 > 0$.

(f) $x > 0 \implies \frac{1}{x} > 0$, $x < 0 \implies \frac{1}{x} < 0$

(g) $0 < x < y \implies 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$, $\frac{x}{y} < 1$, $\frac{y}{x} > 1$

(h) $x < y$ und $z < t \implies x + z < y + t$

(i) $0 < x < y$, $0 < z < t \implies 0 < xz < yt$

(j) $x < y$ und $0 < \lambda < 1 \implies x < \lambda x + (1 - \lambda)y < y$

Beweis. (a) Erwinnere

$$x < y \iff y - x \in P, \quad y < z \iff z - y \in P.$$

Nach (O2) bekommt man

$$\underbrace{(z - y) + (y - x)}_{=z-x} \in P.$$

Folglich gilt $x < z$.

(b) Wir betrachten

$$(y + z) - (x + z) = y + z - x - z = y - x \in P \text{ (da } x < y \text{)}.$$

Daraus folgt $y + z > x + z$.

(c) Betrachte

$$(-x) - (-y) = y - x \in P \text{ (da } x < y \text{)}.$$

Daher gilt $-x > -y$.

(d)

$$yz - xz = (y - x)z \in P \text{ da } z \in P (z > 0), y - x \in P (y > x)$$

Folglich $yz > xz$.

Die zweite Eigenschaft von (d) wird ähnlich bewiesen.

(e) Sei $x \neq 0$. Falls $x > 0$, dann $x^2 = xx \in P$. Falls $x < 0$, Dann $-x \in P$. Deshalb $\underbrace{(-x)(-x)}_{=x^2} \in P$.

(j) Da $\lambda > 0$, nach (d) gilt $\lambda x < \lambda y$.

$$1 - \lambda > 0 \implies (1 - \lambda)x < (1 - \lambda)y$$

Nun beachte

$$\begin{aligned} x &= 1x \\ &= (\lambda + 1 - \lambda)x \\ &= \lambda x + (1 - \lambda)x \\ &< \lambda x + (1 - \lambda)y \\ &< \lambda y + (1 - \lambda)y \\ &= y \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Sei K ein total angeordneter Körper. Wir wissen schon, dass $\{0, 1\} \subset K$ und $1 \neq 0$. Gibt es andere Elemente in K ? Dank der Ordnungsaxiome zeigen wir nun, dass K noch weitere Elemente außer 0 und 1 hat: In der Tat, da $1 > 0$ (Satz 1.2.2 (e)) gilt

$$0 + 1 < 1 + 1 =: 2.$$

Folglich $0 < 1 < 2$ usw.

In einem beliebigen Körper kann es passieren, dass $1 + 1 = 0$!

Definition 1.2.3. Sei K ein total angeordneter Körper. Ein Element $x \in K$ wird nichtnegativ genannt, geschrieben $x \geq 0$ (x größer-gleich 0), wenn $x > 0$ oder $x = 0$.

Wir definieren eine Relation $\leq$ auf K durch

$$x \leq y \iff y - x \geq 0 \text{ (} x \text{ kleiner-gleich } y \text{)}.$$

$\leq$ ist eine Ordnungsrelation, d.h.

(a) $x \leq x$ (Reflexivität)

(b) $x \leq y$ und $y \leq z \implies x \leq z$ (Transitivität)

(c) $x \leq y$ und $y \leq x \implies x = y$ (Antisymmetrie)

Für zwei (nicht unbedingt verschiedene) Elemente $x, y \in K$ heißt $\frac{x+y}{2}$ das arithmetische Mittel von x und y . Nach Satz 1.2.2 (j) gilt $x < \frac{x+y}{2} < y$ (für $\lambda = \frac{1}{2}$).

Definition 1.2.4 (Vorzeichen und Absolutbetrag). Sei K ein total angeordneter Körper. Sei $x \in K$. Man nennt

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

das Vorzeichen von x . Der Betrag von x ist

$$|x| := x \cdot \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

d.h.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Beachte, dass $|x| \geq 0$ für alle $x \in K$.

Satz 1.2.5 (Rechenregeln). Sei K ein total angeordneter Körper. Für alle $x, y \in K$ gilt:

(a) $|x| \geq 0$ und $x \neq 0 \iff |x| > 0$

(b) $||x|| = |x|, \quad |-x| = |x|$

(c) $|x| \leq y \iff x \leq y \text{ und } -x \leq y \iff -y \leq x \leq y$

(d) $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$ (Dreiecksungleichungen)

(e) $|x| \leq |y| \iff x^2 \leq y^2$

(f) $x = y \iff |x| = |y| \text{ und } \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y)$.

(g) $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(x) \operatorname{sgn}(y), \quad |xy| = |x||y|$

Beweis. (a) **(a)** **Erinnere**, $|x| \geq 0 \forall x \in K$ und $|x| = 0 \iff x = 0$. Daher sieht man, dass $x \neq 0 \implies |x| > 0$.

Andererseits, wenn $|x| > 0$, dann gilt $x \neq 0$ und $|x| \geq 0$ (dies ist immer wahr). Daraus folgt die Aussage **(a)**.

(d) Nach Definition gilt $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$. Aus Satz 1.2.2 (h) bekommt man $x + y \leq |x| + |y|$. Wenn wir x durch $-x$ (bzw. y durch $-y$) substituieren, gewinnen wir

$$-(x + y) \leq |-x| + |-y| \stackrel{\text{(b)}}{=} |x| + |y|.$$

Es folgt (nach (c))

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Es bleibt die Ungleichheit $||x| - |y|| \leq |x - y|$ zu zeigen.

Beachte

$$|x| = |x + y - y| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|.$$

Folglich gilt

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

Ähnlicherweise hat man

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x|.$$

Daher gilt

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|.$$

Nach (c) erhält man

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

□

1.3 Vollständigkeitsaxiom

Am Anfang des Kapitels haben wir gesehen, dass die Zahlengerade keine „Lücken“ hat. Das Vollständigkeitsaxiom ist eine streng mathematische Formulierung dieser geometrischen Anschauung.

Definition 1.3.1. Sei K ein total angeordneter Körper, und sei $A \subset K$, $A \neq \emptyset$.

- A heißt nach oben beschränkt, falls es ein $c \in K$ gibt mit $a \leq c$ für alle $a \in A$; c heißt dann eine obere Schranke von A .
Ist c eine obere Schranke von A und $c \in A$, so heißt c Maximum von A , bezeichnet mit $\max A$.
- A heißt nach unten beschränkt, falls es ein $c \in K$ gibt mit $a \geq c$ für alle $a \in A$; c heißt dann eine untere Schranke von A .
Ist c eine untere Schranke von A und $c \in A$, so heißt c Minimum von A , bezeichnet mit $\min A$.
- Ist A nach unten und oben beschränkt, so heißt A beschränkt.
- Ein Element $c \in K$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von A , bezeichnet mit $\sup A$, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
 - (i) $a \leq c$ für alle $a \in A$.
 - (ii) Ist b eine obere Schranke von A , so folgt $c \leq b$.
- Ein Element $c \in K$ heißt größte untere Schranke oder Infimum von A , bezeichnet mit $\inf A$, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
 - (i) $a \geq c$ für alle $a \in A$.
 - (ii) Ist b eine untere Schranke von A , so folgt $c \geq b$.

Beispiel. Erinnere, dass $1 > 0$ (Satz 1.2.2 (e)) und $2 = 1 + 1 > 1$. Betrachte

$$A_1 := \{x \in K \mid 0 \leq x \leq 1\}, \quad A_2 := \{x \in K \mid 0 < x < 1\}.$$

Man sieht: 0 ist eine untere Schranke von A_1 und A_2 , 1 und 2 sind obere Schranken von A_1 und A_2 . Deshalb sind A_1, A_2 beschränkt und $0 = \min A_1, 1 = \max A_1$.

Bemerkung 1.3.2. (i) *Hat eine Menge ein Maximum (bzw. Minimum, Supremum, Infimum), so ist dieses eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $c = \max A$; d.h. $c \geq a \forall a \in A$ und $c \in A$. Sei c' ein weiteres Maximum von A . Dann ist c' eine obere Schranke von A und $c' \in A$. Daraus folgt $c' \geq c$ (da $c \in A$) und $c \geq c'$ (da $c' \in A$ und c eine obere Schranke von A). Deshalb gilt $c = c'$. $\square$

(ii) *A hat ein Maximum $\iff A$ hat ein Supremum und $\sup A \in A$. In diesem Fall gilt $\max A = \sup A$. Wir haben eine ähnliche Eigenschaft für das Minimum.*

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Angenommen, A hat ein Maximum und $c = \max A$. Dann $c \in A$ und wenn c' eine obere Schranke von A ist, gilt $c' \geq c$. Es folgt c ist die kleinste obere Schranke von A . Daher gilt $c = \sup A$.

„ $\Leftarrow$ “: Ist offensichtlich. $\square$

(iii) *Es gibt nach oben beschränkte Mengen, die ein Supremum besitzen, aber kein Maximum:* Woche 3
Betrachte $K_- := \{x \in K \mid x < 0\}$.

Man sieht, 0 ist eine obere Schranke von K_- , und wenn c eine weitere obere Schranke von K_- ist, dann $c \geq 0$ (denn wenn $c < 0$, bekommt man $c < \frac{c}{2} = \frac{c+0}{2} < 0$. Das ist ein Widerspruch, weil $\frac{c}{2} \in K_-$, $c < \frac{c}{2}$).

Folglich ist 0 die kleinste obere Schranke von K_- , d.h. $0 = \sup K_-$, aber $0 \notin K_-$. Daher hat K_- kein Maximum (nach (ii)).

Ähnlicherweise gibt es nach unten beschränkte Mengen, die ein Infimum besitzen, aber kein Minimum.

Definition 1.3.3. Ein total angeordneter Körper K heißt vollständig, falls die folgende Eigenschaft (Vollständigkeitsaxiom) erfüllt ist.

(V) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Supremum.

Bemerkung. Die Aussage (V) ist äquivalent zur folgenden Aussage:

(V') Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Infimum.

Definition 1.3.4. Ein vollständig angeordneter Körper K heißt Körper der reellen Zahlen, bezeichnet mit $\mathbb{R}$.

Satz 1.3.5 (Existenz von $\mathbb{R}$). *Es gibt mindestens einen Körper der reellen Zahlen.*

Satz 1.3.6 (Eindeutigkeit des Körpers der reellen Zahlen). *Seien K und K' zwei Körper der reellen Zahlen. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi: K \rightarrow K'$, so dass für alle $x, y \in K$ gilt:*

- (i) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- (ii) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$
- (iii) $\varphi(1) = 1$
- (iv) Falls $x < y$, dann $\varphi(x) < \varphi(y)$.

Der Satz besagt, dass K und K' die gleiche Körperstruktur haben, d.h. K und K' sind isomorph. Wir sagen dann, $\mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt bis auf Isomorphie, und wir sprechen nun von dem Körper $\mathbb{R}$.

1.4 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Wir wollen nun natürliche Zahlen definieren. Wir möchten zum Einen, dass 1 eine natürliche Zahl ist, und zum Zweiten, dass jede natürliche Zahl n einen Nachfolger $n + 1$ hat.

Definition 1.4.1. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv, falls

- (a) $1 \in M$,
- (b) $x \in M \implies x + 1 \in M$.

Sei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ die Menge der positiven Zahlen. Man bemerkt, dass $\mathbb{R}_+$ induktiv ist. Es gibt viele induktive Mengen, z.B. $M := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$.

Die Menge der natürlichen Zahlen ist definiert als Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} := \bigcap \{M \mid M \subset \mathbb{R}, M \text{ induktiv}\}$$

Beachte: $\mathbb{N}$ ist auch induktiv und ist die kleinste induktive Menge, d.h. $\forall$ induktive Menge $M \subset \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{N} \subset M$.

Bemerkung. Man findet übliche Eigenschaften der natürlichen Zahlen wieder. Man setzt $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$, ..., $9 := 8 + 1$, usw. Diese Zahlen sind alle natürliche Zahlen (d.h. gehören zu $\mathbb{N}$). Die folgenden Eigenschaften gelten auch:

- (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \geq 1$.
- (b) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$: $m + n \in \mathbb{N}$, $mn \in \mathbb{N}$.
- (c) Ist $m < n$ ($m, n \in \mathbb{N}$), so ist $n - m \in \mathbb{N}$.
- (d) Zwischen n und $n + 1$ liegt keine weitere natürliche Zahl. Insbesondere, falls $x, n \in \mathbb{N}$ mit $x > n$, so gilt $x \geq n + 1$.

Beweis. Zu (a): Da die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ induktiv ist, so gilt $\mathbb{N} \subset \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$. Daraus folgt (a).

Zu (c): Sei $A := \{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \in \mathbb{N}\}$. Beachte: $A \subset \mathbb{N}$ und A induktiv $\implies A = \mathbb{N}$. Anders gesagt $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $x - 1 \in \mathbb{N}$. Setze

$$B := \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m < n \text{ und } m \in \mathbb{N} \text{ so ist } n - m \in \mathbb{N}\}.$$

Wir zeigen, dass B induktiv ist. Sei $n \in B$. Falls $n = 1$, so ist $n + 1 = 2 \in B$.

Betrachte nun $n > 1$. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n + 1$.

Falls $m = 1$, so ist $n + 1 - m = n + 1 - 1 = n \in \mathbb{N} \implies n + 1 - m \in \mathbb{N}$.

Falls $m > 1$, so ist $m - 1$ natürliche Zahl. Folglich gilt

$$n - (m - 1) \in \mathbb{N} \text{ (da } n \in B) \implies n + 1 - m = n - (m - 1) \in \mathbb{N} \implies n + 1 \in B,$$

d.h. B ist induktiv. Deshalb bekommt man $B = \mathbb{N}$ und (c) folgt.

Zu (d): Wir nehmen an, dass es $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n < m < n + 1$. Es folgt $0 < m - n < 1$. Nach (c) hat man $m - n \in \mathbb{N}$. Deshalb bekommt man $m - n \geq 1$ (nach (a)), Widerspruch!

Somit folgt die gewünschte Behauptung.

Die Aussage (b) wird ähnlich wie (a), (c) bewiesen.

□

Definition 1.4.2. Die Menge der ganzen Zahlen ist definiert durch

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}) = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \subset \mathbb{R}.$$

Man bemerkt, die Summe (und das Produkt) von ganzen Zahlen wieder ganze Zahlen sind.

Wir setzen

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Die Menge der rationalen Zahlen ist definiert durch

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Eine Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt irrational.

Man kann leicht zeigen, dass $\mathbb{Q}$ (mit der Addition und Multiplikation der reellen Zahlen und mit der Ordnung der reellen Zahlen) ein total angeordneter Körper. Wir beachten jedoch, dass $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist.

Satz 1.4.3 (Induktionsprinzip). Hat $M \subset \mathbb{N}$ die folgende Eigenschaften:

(a) $1 \in M$,

(b) $x \in M \implies x + 1 \in M$,

so folgt $M = \mathbb{N}$.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist M induktiv. Deshalb $\mathbb{N} \subset M$ (da $\mathbb{N}$ die kleinste induktive Menge ist). Aus $M \subset \mathbb{N}$ bekommen wir $\mathbb{N} = M$. □

Satz 1.4.4 (Beweis durch vollständige Induktion). Seien $A(n)$ Aussagen, die für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert sind. Wenn

(a) $A(1)$ richtig ist und

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt die Implikation $A(n) \implies A(n + 1)$,

dann ist $A(n)$ richtig $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Setze $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ richtig}\}$. Nach Voraussetzung gilt $1 \in M$, und wenn $x \in M$, dann $x + 1 \in M$ (denn die Aussage (Implikation) „ $A(x) \implies A(x + 1)$ “ ist richtig). Man sieht, dass M die Voraussetzung im Satz 1.4.3 erfüllt. Daher $M = \mathbb{N}$. Anders gesagt ist $A(n)$ richtig $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Der Satz 1.4.4 gibt uns eine mathematische Beweismethode („Beweis durch vollständige Induktion“), welche von größter Bedeutung in der Mathematik ist.

Wir erklären nun, wie man diese Methode anwendet:

Seien $A(n)$ Aussagen, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängen. Man will zeigen, dass $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Der Beweis durch vollständige Induktion besteht aus zwei Schritten:

Erster Schritt (Induktionsanfang, $n = 1$): Wir zeigen, dass $A(1)$ wahr ist.

Zweiter Schritt (Induktionsschritt, $n \rightarrow n + 1$): Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist (diese heißt Induktionsvoraussetzung), und wir müssen zeigen, dass $A(n + 1)$ auch wahr ist (diese heißt Induktionsbehauptung).

Anders gesagt müssen wir zeigen, dass aus der Wahrheit von $A(n)$ die Wahrheit von $A(n + 1)$ folgt.

Beispiel. Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n - 1)^3 + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $A(n)$ die Aussage $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n - 1)^3 + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$. Wir wollen zeigen: $A(n)$ ist wahr für alle n .

Induktionsanfang ($n = 1$): Die Aussage $A(1)$ ist wahr, das $1^3 = 1 = \frac{1}{4}1^2(1 + 1)^2$.

Induktionsschritt ($n \rightarrow n + 1$): Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist. Wir überprüfen, dass $A(n + 1)$ auch wahr ist. In der Tat hat man

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + (n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 &= (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + (n + 1)^3 \\ &\stackrel{1}{=} \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2 + (n + 1)^3 \\ &= (n + 1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1 \right) \\ &= (n + 1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4} \right) \\ &= (n + 1)^2 \frac{(n + 2)^2}{4} \end{aligned}$$

Es folgt, dass $A(n + 1)$ wahr ist. Daher haben wir bewiesen, dass $A(n)$ wahr $\forall n \in \mathbb{N}$ ist. $\square$

Bemerkung 1.4.5. Einen Beweis durch Induktion kann man mit einer beliebigen ganzen Zahl anfangen. Sei $q \in \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}_{\geq q} := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq q\}$. Seien $A(n)$ Aussagen, die für $n \in \mathbb{Z}_{\geq q}$ definiert sind.

Wenn

¹(da $A(n)$ wahr ist; IV)

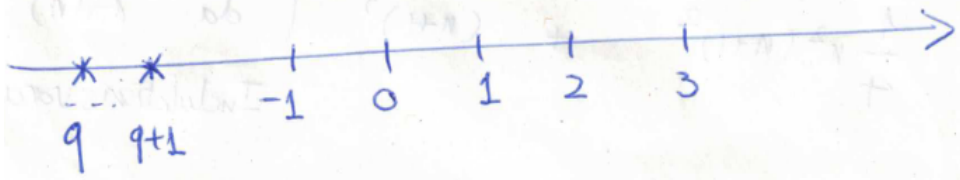
1) $A(q)$ richtig ist, und

2) die Aussage „ $A(n) \implies A(n+1)$ “ $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq q}$ gilt,

dann gilt $A(n) \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq q}$. Dies folgt aus Satz 1.4.4 durch Indexverschiebung: Die Abbildung

$$f: \mathbb{Z}_{\geq q} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n - q + 1$$

ist bijektiv und $f(n+1) = f(n) + 1$.



Definition 1.4.6 (natürliche Potenzen). Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren die natürlichen Potenzen a^n , $n \in \mathbb{N}$, durch

$$a^1 := a, \quad a^{n+1} := a^n \cdot a, \quad n \in \mathbb{N}$$

z.B. $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a$, usw.

Bemerkung.

- Die Definition 1.4.6 ist eine rekursive Definition. Im Allgemeinen kann man eine rekursive Definition wie folgt beschreiben:
Es soll $\forall n \in \mathbb{N}$ ein Element $f(n)$ einer Menge X zugeordnet werden durch
 - die Angabe von $f(1)$, und
 - eine Vorschrift F , die $\forall n \in \mathbb{N}$ das Element $f(n+1)$ aus den Elementen $f(1), \dots, f(n)$ zu berechnen gestattet:

$$f(n+1) = F(f(1), \dots, f(n))$$

- Man denkt naiv, dass ein solches Verfahren unmittelbar sinnvoll ist. In der Tat, um das zu zeigen, braucht man den Rekursionssatz, den wir in der Vorlesung nicht besprechen. Wir nehmen als gegeben an, dass rekursive Definitionen sinnvoll sind.
- Für rekursive Definitionen kann man mit $\mathbb{Z}_{\geq q}$ anstelle der $\mathbb{N}$ betrachten.

Definition 1.4.7 (ganzzahlige Potenzen). Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir definieren die ganzzahlige Potenzen a^n , $n \in \mathbb{Z}$, durch

$$a^0 := 1, \quad a^n := (a^{-1})^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}, n < 0.$$

Man setzt auch $0^0 := 1$.

Man beweist durch Induktion die Potenzgesetze:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ und } m, n \in \mathbb{N}_0$$

oder $\forall a, b \in \mathbb{R}^*, m, n \in \mathbb{Z}$.

Satz 1.4.8 (Bernoullische Ungleichung). Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Ist $n \geq 2$ und $x \neq 0$, so ist die Ungleichung strikt.

Beweis. Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

$n = 0$: Man hat $(1+x)^0 = 1$, $1+0x = 1 \implies (1+x)^0 \geq 1+0x$.

$n \rightarrow n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ fest. Wir nehmen an, dass $(1+x)^n \geq 1+nx$. Durch Multiplikation beider Seiten mit $(1+x)$ erhält man

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

Ist $x \neq 0$, $n \geq 1$, so ist $nx^2 > 0$. Daher ist die Ungleichung strikt, wenn $x \neq 0$ und $n \geq 2$. □

Definition 1.4.9. Seien I und X Mengen. Eine Abbildung $f: I \rightarrow X, i \mapsto x_i$ heißt auch eine Familie von Elementen von X , geschrieben $(x_i)_{i \in I}$.

Die Menge I heißt Indexmenge. Ist $I = \{1, 2, \dots, n\}$, so heißt $(x_i)_{i \in I} := (x_1, \dots, x_n)$ ein n -Tupel. Man schreibt auch $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Definition 1.4.10. $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\forall (x_1, \dots, x_n)$ n -Tupel von $\mathbb{R}$ definieren wir die Zahlen $\sum_{i=1}^n x_i$ und $\prod_{i=1}^n x_i$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^1 x_i &:= x_1, & \sum_{i=1}^{n+1} x_i &:= \sum_{i=1}^n x_i + x_{n+1}, \\ \prod_{i=1}^1 x_i &:= x_1, & \prod_{i=1}^{n+1} x_i &:= \prod_{i=1}^n x_i \cdot x_{n+1}. \end{aligned}$$

Wir schreiben auch $x_1 + \dots + x_n$ für $\sum_{i=1}^n x_i$ und $x_1 \cdots x_n$ für $\prod_{i=1}^n x_i$.

Wir setzen $\sum_{i \in \emptyset} x_i := 0$, $\prod_{i \in \emptyset} x_i := 1$.

Sei I eine Indexmenge mit n Elementen, $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen von $\mathbb{R}$. Sei $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ eine Aufzählung von I . Wir setzen

$$\sum_{i \in I} x_i := \sum_{k=1}^n x_{i_k} = x_{i_1} + \dots + x_{i_n}, \quad \prod_{i \in I} x_i := \prod_{k=1}^n x_{i_k}.$$

Die Definition ist abhängig von der Wahl der Aufzählung.

Betrachten wir nun $m, n \in \mathbb{Z}$, und

$$I_{mn} := \{k \in \mathbb{Z} \mid m \leq k \leq n\} = \{m, \dots, n\}.$$

Dann setzen wir

$$\sum_{k=m}^n x_i := \sum_{i \in I_{mn}} x_i, \quad \prod_{k=m}^n x_i := \prod_{i \in I_{mn}} x_i.$$

Für $m > n$ ist $I_{mn} = \emptyset$, also gilt $\sum_{i=m}^n x_i = 0$, $\prod_{i=m}^n x_i = 1$.

Definition 1.4.11. Für $n \in \mathbb{N}_0$ wird $n!$ (n Fakultät) definiert durch

$$n! := \prod_{k=1}^n k,$$

also $0! = 1$, $1! = 1$ und $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ für $n \geq 1$.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definiert man die Binomialkoeffizienten „ α über k “ durch

Woche 4

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} (\alpha - j)$$

also

$$\binom{\alpha}{0} = \prod_{j=0}^{-1} (\alpha - j) = 1$$

$$\binom{\alpha}{1} = \alpha$$

und

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - k + 1)}{k!}$$

für $k > 1$.

Man kann leicht zeigen:

(1) Rekursionsformel:

$$\binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha}{k} \frac{\alpha - k}{k+1}$$

(2) Additionsformel:

$$\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$$

(3) $\forall n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & k \leq n, \\ 0 & k > n. \end{cases}$$

(4)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{k+1} &= \prod_{j=0}^k \frac{\alpha - j}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j) \cdot \frac{\alpha - k}{k+1} \\ &= \binom{\alpha}{k} \frac{\alpha - k}{k+1} \end{aligned}$$

$\implies$ (1) folgt. Daher.

$$\begin{aligned}
 \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} &= \binom{\alpha}{k} \left(1 + \frac{\alpha - k}{k+1}\right) \\
 &= \binom{\alpha}{k} \frac{\alpha + 1}{k+1} \\
 &= \frac{1}{(k+1)!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j) \cdot (\alpha + 1) \\
 &= \frac{1}{(k+1)!} \prod_{\tilde{j}=0}^k (\alpha + 1 - \tilde{j}) \quad (\text{setze } \tilde{j} := j + 1) \\
 &= \binom{\alpha + 1}{k+1}
 \end{aligned}$$

$\implies$ (2) folgt.

Wir zeigen (3): Ist $n < k$, so ist

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n - j) = \frac{1}{k!} n(n-1) \cdots (n-n) \cdots (n-k+1) = 0.$$

Sei $n \geq k$. Ist $k = 0$, so ist

$$\binom{n}{0} = 1 = \frac{n!}{0!n!}.$$

Ist $k \geq 1$, so ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)(n-k-1) \cdots 1}{(n-k)(n-k-1) \cdots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Zu (4):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$$

□

Satz 1.4.12 (Binomischer Lehrsatz). $\forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
 (x+y)^n &= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k
 \end{aligned}$$

Insbesondere für $n = 2, 3$ erhalten wir

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

Beweis. Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

$n = 1$:

$$(x + y)^1 = x + y = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y$$

$n \rightarrow n + 1$: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass die gewünschte Gleichung für n gilt, d.h.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Betrachte

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)^n (x + y) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) (x + y) \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \binom{n}{1} x^n y + \dots + \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \dots + \binom{n}{n} x y^n \\ &\quad + \binom{n}{0} x^n y + \binom{n}{1} x^{n-1} y^2 + \dots + \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k + \dots \\ &\quad + \binom{n}{n-1} x y^n + \binom{n}{n} y^{n+1} \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right) x^n y + \dots \\ &\quad + \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^{n-k+1} y^k + \dots \\ &\quad + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right) x y^n + \binom{n}{n} y^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \binom{n+1}{1} x^n y + \dots + \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k + \dots \\ &\quad + \binom{n+1}{n} x y^n + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{(n+1)-k} y^k \end{aligned}$$

□

1.5 Folgerungen des Vollständigkeitsaxioms

Satz 1.5.1 (Satz von Archimedes). *Die Menge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist nicht nach oben beschränkt, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.*

Beweis durch Widerspruch. Angenommen, $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt. (V) $\implies$ $\mathbb{N}$ besitzt ein Supremum $s = \sup \mathbb{N}$. Es folgt, dass $s - 1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist, d.h. $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > s - 1 \implies x < n + 1 \implies s$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, Widerspruch! □

Folgerung: $\mathbb{N}$ ist unendlich.

Beweis. Wäre $\mathbb{N}$ endlich, dann hätte $\mathbb{N}$ ein Maximum (insbesondere nach oben beschränkt), Widerspruch! $\square$

Satz 1.5.2 (Satz von Eudoxus). *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Anders gesagt, man hat $\inf \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0$.*

Beweis. Angenommen, es gibt $\varepsilon > 0$, so dass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$. Folglich hat man $n \leq \frac{1}{\varepsilon} \forall n \in \mathbb{N}$; das bedeutet: $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt (Widerspruch!). $\square$

Satz 1.5.3 (Wohlordnungsprinzip). *Jede nichtleere, nach oben (bzw. unten) beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ besitzt ein Maximum (bzw. Minimum). Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein Minimum.*

Beweis. Sei $A \subset \mathbb{Z} (\subset \mathbb{R})$ nach oben beschränkt. Laut Axiom (V) gibt es $s = \sup A \in \mathbb{R}$ (d.h. s ist die kleinste obere Schranke von A). Folglich ist $s - 1$ keine obere Schranke von A . Daraus folgt $\exists n_0 \in A$ mit $s - 1 < n_0$. Daher gilt $s < n_0 + 1$. Da $s \geq a \forall a \in A$, bekommt man $n_0 + 1 > a \forall a \in A (\subset \mathbb{Z}) \implies n_0 \geq a \forall a \in A$. Somit ist n_0 eine obere Schranke von A und $n_0 \in A$. Anders gesagt $n_0 = \max A$.

Die Aussage für nach unten beschränkte Mengen wird ähnlich bewiesen.

Betrachte nun eine nicht-leere Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$. Da $n \geq 1 \forall n \in \mathbb{N}$, ist A nach unten beschränkt. Nach dem ersten Teil des Beweises besitzt A ein Minimum. $\square$

Definition 1.5.4 (Gauß-Klammer). *Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ heißt die ganze Zahl*

$$\lfloor x \rfloor := \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

die Gauß-Klammer oder der ganzzahligen Anteil von x (d.h. die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist). Setzen

$$\text{frac}(x) := x - \lfloor x \rfloor.$$

Ist $x \geq 0$, so ist $\text{frac}(x)$ der Nachkommanteil von x , z.B. $\lfloor 3,1 \rfloor = 3$, $\text{frac}(3,1) = 0,1$.

Man hat: $\forall x \in \mathbb{R}: \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Satz 1.5.5 (Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann gibt es $q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < b$. Seien $a \subset B \subset \mathbb{R}$. Wir sagen, A ist dicht in B , falls $\forall x, y \in B$ mit $x < y$, $\exists z \in A$ mit $x < z < y$. Der Satz 1.5.5 besagt, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.*

Beweis. Da $b - a > 0$, nach Satz 1.5.2 $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b - a$. Dann gilt $na + 1 < nb$. Andererseits erinnere, dass $na < \lfloor na \rfloor + 1 \leq na + 1 < nb$. Dividiert man beide Seiten durch n , so erhält man $a < \underbrace{\frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n}}_{\in \mathbb{Q}} < b$ wie gewünscht. $\square$

Satz 1.5.6 (Existenz der k -ten Wurzel). *Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und sein $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 > 0$ und $x_0^k = a$, genannt k -te Wurzel von a , geschrieben*

$$a^{\frac{1}{k}} := \sqrt[k]{a} := x_0.$$

Beweis. Wenn $k = 1$, ist die Behauptung offensichtlich. Wir betrachten nun $k \geq 2$.

Eindeutigkeit: Wir nehmen an, dass $\exists x, y > 0$ mit $x^k = y^k = a$. Erinnere $x < y \iff x^k < y^k$ ($k \in \mathbb{N}$). Folglich, wenn $\neq y$, so gilt $x^k \neq y^k$. Somit erhält man $x = y$.

Existenz: Wir zeigen, es gibt $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, mit $x^k = a$. Setze

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ und } x^k < a\}.$$

Beachte, dass $0 \in A \implies A \neq \emptyset$.

Zweitens ist $1 + a$ eine obere Schranke von A , denn $x \in A \implies x^k < a < 1 + ka$, welche kleinergleich $(1 + a)^k$ (nach der Bernoulli-Ungleichung) ist. Daher gilt

$$x^k < (1 + a)^k \implies x < 1 + a.$$

Deshalb ist A nach oben beschränkt.

Nach Axiom (V) $\exists s = \sup A$. Wegen $0 \in A$ gilt $s \geq 0$.

Wir beweisen $s^k = a$ durch Widerspruch:

Angenommen, $s^k \neq a$. Es gibt dann zwei Möglichkeiten: $s^k < a$, $s^k > a$.

Fall 1: $s^k < a$

Binomischer Lehrsatz (Satz 1.4.12) besagt $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left(s + \frac{1}{n}\right)^k &= s^k + \binom{k}{1} s^{k-1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \binom{k}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= s^k + \frac{1}{n} \left(\binom{k}{1} s^{k-1} + \binom{k}{2} s^{k-2} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \binom{k}{k} \frac{1}{n^{k-1}} \right) \\ &\leq s^k + \frac{1}{n} \left(\binom{k}{1} s^{k-1} + \binom{k}{2} s^{k-2} + \dots + \binom{k}{k} \right) \\ &= s^k + \frac{1}{n} \cdot b \end{aligned}$$

wobei $b := \binom{k}{1} s^{k-1} + \dots + \binom{k}{k}$.

Satz von Eudoxus impliziert: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n_0} < \frac{a - s^k}{b}$. Es folgt

$$\left(s + \frac{1}{n_0}\right)^k \leq s^k + \frac{1}{n_0} \cdot b < s^k + \frac{a - s^k}{b} \cdot b = a.$$

Somit $s + \frac{1}{n_0} \in A$. Da s eine obere Schranke von A ist, gilt $s + \frac{1}{n_0} \leq s$, Widerspruch!

Fall 2: $s^k > a$. Insbesondere $s > 0$.

Nach Satz von Eudoxus $\exists n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} < s$. Daher $\frac{1}{ns} < 1 \implies -\frac{1}{ns} > -1$. Es folgt

$$\left(s - \frac{1}{n}\right)^k = s^k \left(1 - \frac{1}{sn}\right)^k \geq s^k \left(1 - \frac{k}{sn}\right)$$

nach Bernoulli-Ungleichung und Tatsache, dass $1 - \frac{1}{ns} \geq 0$.

Wir wollen nun eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ sehr groß wählen, so dass $s^k(1 - \frac{k}{sn}) > a$. Dazu beachtet man

$$s^k \left(1 - \frac{k}{sn}\right) > a \iff s^k - a > \frac{ks^{k-1}}{n} \iff n > \frac{ks^{k-1}}{s^k - a}.$$

Wähle n mit dieser Eigenschaft. Daher

$$s^k \left(1 - \frac{k}{sn}\right) > a, \text{ und } \left(s - \frac{1}{n}\right)^k \geq s^k \left(1 - \frac{k}{sn}\right) > a.$$

Andererseits erinnern wir, dass $s = \sup A$. Daraus folgt: $\exists x \in A$ mit $x > s - \frac{1}{n}$. Deshalb erhält man

$$a > x^k > \left(s - \frac{1}{n}\right)^k > a.$$

Widerspruch!

Zum Schluss gilt $s^k = a$. Da $a \neq 0$, gilt $s \neq 0$ (daher $s > 0$). □

Definition 1.5.7 (rationale Potenzen). Sei $a > 0$. Setze

$$a^{\frac{k}{m}} := \sqrt[m]{a^k} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$$

Für $q \in \mathbb{Q}$ schreibe $q = \frac{k}{m}$, und wir definieren $a^q := a^{\frac{k}{m}} = \sqrt[m]{a^k}$.

Diese Definition hängt von der Darstellung $q = \frac{k}{m}$ der Rational Zahl q nicht ab. Es gelten die folgenden Potenzgesetze:

$$a^q a^r = a^{q+r}, \quad (a^q)^r = a^{qr}, \quad \text{für } a > 0, q, r \in \mathbb{Q}.$$

Sei $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ein n -Tupel von reellen Zahlen. Die Zahl

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n)$$

heißt das arithmetische Mittel von $(x_1, \dots, x_n)$. Sind alle $x_k \geq 0$, so heißt

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right) = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

das geometrische Mittel von $(x_1, \dots, x_n)$.

Es gilt die AGM-Ungleichung ($A = \text{arithmetisches}$, $G = \text{geometrisches}$, $M = \text{Mittel}$):

$$\frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n) \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \quad \forall x_1, \dots, x_n \geq 0,$$

wobei die Gleichheit genau dann auftritt, wenn $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Für $n = 2$ lautet diese Ungleichung

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad \forall x, y \geq 0.$$

Bemerkung. Wenden wir die AGM-Ungleichung auf $x_1 = 1, x_2 = \frac{x+n}{n}, \dots, x_n = \frac{x+n}{n}$ an (wobei $x \in \mathbb{R}, x \geq -n, n \in \mathbb{N}$), erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sqrt[n+1]{1 \cdot \underbrace{\frac{x+n}{n} \dots \frac{x+n}{n}}_{n \text{ mal}}} \leq \frac{1}{n+1} \left(1 + \underbrace{\frac{x+n}{n} + \dots + \frac{x+n}{n}}_{n \text{ mal}} \right) \\ \iff & \left(\frac{x+n}{n} \right)^{\frac{n}{n+1}} \leq \frac{x+n+1}{n+1} \\ \iff & \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \leq \left(1 + \frac{x}{n+1} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}, x \geq -n, n \in \mathbb{N}$.

Die Gleichheit tritt genau dann auf, wenn

$$1 = \frac{x+n}{n} \iff x = 0.$$

Deshalb bekommt man

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \geq -n, x \neq 0.$$

Definition 1.5.8. Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ heißt Intervall, wenn I mit je zwei Elementen $x \leq y$ ($x, y \in I$) auch alle Elemente z mit $x \leq z \leq y$ erhält.

Beispiel 1.5.9. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

ein Intervall. Falls $a = b$, ist $[a, b] = \{a\}$; falls $a > b$, ist $[a, b] = \emptyset$.

Die Folgenden Mengen sind auch Intervalle:

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

In der Tat kann man zeigen, dass ein Intervall von einer der Formen ist: $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) .

Intervalle der Form $[a, b]$ heißen abgeschlossen oder kompakt.

Intervalle der Form $(a, b]$, $[a, b)$ heißen halboffen.

Intervalle der Form (a, b) heißen offen.

Definition 1.5.10 (Intervallschachtelung). Für ein Intervall I mit den Endpunkten $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die Länge von I als $|I| := |b - a|$.

Eine Familie $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von kompakten Intervallen heißt Intervallschachtelung, falls gilt:

$$(i) \quad I_{n+1} \subset I_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}: |I_n| < \varepsilon$$

Satz 1.5.11 (Intervallschachtelungsprinzip). Zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es (genau) ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}$.

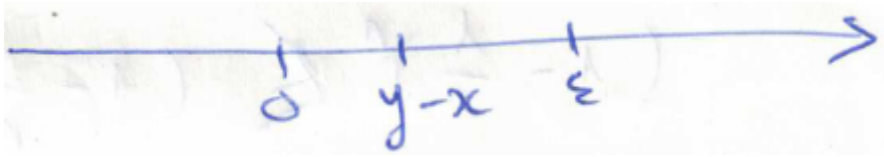
Der Satz gilt nicht, wenn wir nicht fordern, dass I_n abgeschlossen sind, z.B. für $I_n = (0, \frac{1}{n})$ Woche 5 hat man $I_{n+1} \subset I_n$ und $\forall \varepsilon > 0 \exists n: |I_n| < \varepsilon$. Bemerke $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$ (weil wenn ein $x \in I_n \forall n$, dann $0 < x < \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$, das ist Widerspruch wegen des Satzes 1.5.2).

Beweis. Schreibe $I_n = [a_n, b_n]$. Sei $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. Da $I_m \subset I_n$ für $m \geq n$, gilt $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$. Folglich hat man $b_n \geq a_m \forall m, n \in \mathbb{N}$. Anders gesagt b_n ist eine obere Schranke für $A \forall n \in \mathbb{N}$.

Nach Vollständigkeitsaxiom $\exists \sup A$. Deshalb $\sup A \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$. Außerdem $a_n \leq \sup A \forall n$. Es folgt $\sup A \in [a_n, b_n] \forall n$. Daher gilt $\sup A \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$, d.h. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ enthält mindestens eine Zahl.

Wir zeigen nun, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ höchstens eine Zahl enthält. Dazu nehmen wir $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. O.B.d.A. nehmen wir an, dass $x \leq y$. Es folgt $[x, y] \subset [a_n, b_n] \implies 0 \leq y - x \leq$

$b_n - a_n = |I_n| \forall n \in \mathbb{N}$. Da $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist, gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists n: |I_n| < \varepsilon$.
Daraus folgt: $0 \leq y - x \leq \varepsilon \forall \varepsilon > 0$.



Daher erhält man $y - x = 0$ (denn wenn $y - x > 0$, setze $\varepsilon; + \frac{y-x}{2}$; man sieht: $y - x > \varepsilon$, Widerspruch!).

Zum Schluss besitzt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ genau ein Element. □

Satz 1.5.12. Sei

$$I_n = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right].$$

Dann ist $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Die Zahl e mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{e\}$ heißt Eulersche Zahl.

Beweis. Erinnere

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \geq -n, x \neq 0$$

Ersetzen $x = 1, -1$ in der Ungleichung, erhalten wir

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Setze

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad c_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Man hat

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} = c_{n+2}^{-1} < c_{n+1}^{-1} = b_n,$$

d.h. $I_n \subset I_{n+1} \forall n$.

Erinnere b_n ist eine obere Schranke von $A = \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ (siehe Beweis von Satz 1.5.11).
Insbesondere gilt

$$a_M \leq b_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^{1+1} = 2^2 = 4 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Wir betrachten

$$|I_n| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = a_n \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{4}{n}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon^{-1} < \varepsilon$. Daher für $n \geq 4n_\varepsilon$ hat man

$$|I_n| \leq \frac{4}{n} \leq \frac{4}{4n_\varepsilon} = \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Es folgt, dass $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist. □

1.6 Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Definition 1.6.1. (i) Zwei Mengen X, Y heißen gleichmächtig, wenn es $\varphi: X \rightarrow Y$ bijektiv gibt. Wir schreiben $X \sim Y$. Die Relation $X \sim Y$ ist eine Äquivalenzrelation, d.h.

- $\sim$ ist reflexiv: $X \sim X \quad \forall \text{ Menge } X$ (betrachte $\varphi = \text{Identitätsabbildung}$)
- $\sim$ ist symmetrisch: falls $X \sim Y$, dann $Y \sim X$ (denn falls $\exists \varphi: X \rightarrow Y$ bijektiv, dann $\varphi^{-1}: Y \rightarrow X$ (inverse Abbildung) auch bijektiv)
- $\sim$ ist transitiv: falls $X \sim Y$, $Y \sim Z$, dann $X \sim Z$ (denn falls $\varphi: X \rightarrow Y$, $\psi: Y \rightarrow Z$ bijektive Abbildungen, dann ist $\psi \circ \varphi: X \rightarrow Z$ auch bijektiv)

(ii) Eine Menge X heißt endlich, falls $X = \emptyset$ oder $\exists n \in \mathbb{N}: X \sim \{1, 2, \dots, n\}$. Die Kardinalzahl von X ist

$$|X| := 0 \text{ falls } X = \emptyset, \quad |X| := n \text{ falls } X \sim \{1, 2, \dots, n\}.$$

(iii) Eine Menge heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist.

(iv) Eine Menge X heißt abzählbar, falls $X \sim \mathbb{N}$; X heißt höchstens abzählbar, falls X endlich oder abzählbar ist.

Ist X höchstens abzählbar, so heißt eine Bijektion $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow X$ (wenn X endlich ist) oder $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ (wenn X unendlich ist) Aufzählung von X .

Ist X nicht höchstens abzählbar, so heißt X nicht abzählbar oder überabzählbar.

Beispiel. $A := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}$ und $f: A \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \frac{n}{2}$ bijektiv. Daher ist A abzählbar.

Satz 1.6.2. (i) Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist höchstens abzählbar.

(ii) Jede unendliche Menge besitzt eine abzählbare Teilmenge.

(iii) Sind A und B abzählbare Mengen, so ist auch $A \times B$ abzählbar. Eine ähnliche Aussage gilt auch für höchstens abzählbare Mengen.

(iv) Sind A_k höchstens abzählbar für $k \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ höchstens abzählbar.

Beweis. Zu (i): Sei X eine abzählbare Menge. Man hat $\varphi: X \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv. Sei $A \subset X$. Falls A endlich ist, ist A höchstens abzählbar. Betrachte A unendlich. O.B.d.A nehmen wir an, $X = \mathbb{N}$ (durch φ). Dann $A \subset \mathbb{N}$.

Wohlordnungsprinzip impliziert: A hat ein kleinstes Element a_1 , d.h. $a_1 = \min A$. Ähnlicherweise bekommt man $a_2 = \min A \setminus \{a_1\}$, $a_3 = \min A \setminus \{a_1, a_2\}$, ..., $a_n = \min A \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$, usw.

Da A unendlich ist, ist $a \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ nicht leer. Daher ist a_n wohl-definiert, und man bekommt $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv. Zudem bemerkt man, dass $a_n \notin \{a_1, \dots, a_{n-1}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Es folgt $a_j \neq a_{j'} \quad \forall j, j' \in \mathbb{N}, j \neq j'$ (*). Daraus folgt, dass die Abbildung $\varphi_A: A \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto a_n$ bijektiv ist:

φ_A ist injektiv nach (*).

φ_A ist surjektiv, denn $A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ (weil: $k \in A \implies k \in \{a_1, \dots, a_k\}$, da $a_n \geq n \quad \forall n$). Daher $A \sim \mathbb{N}$.

Zu (ii): Ist A eine unendliche Menge, so wählt man nacheinander $a_0 \in A$, $a_1 \in A_1 := A \setminus \{a_0\}$, $a_2 \in A_2 := A \setminus \{a_0, a_1\}$ usw. Das Verfahren bricht nicht ab.

Zu (iii): Wegen $A \sim \mathbb{N}$, $B \sim \mathbb{N}$ genügt es nachzuweisen, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ abzählbar ist. Dazu zeigen wir, dass die Abbildung $\phi: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, (m, n) \mapsto 2^m \cdot 3^n$ injektiv ist. Seien $(m, n), (p, q) \in \mathbb{N}^2$ mit $\phi(m, n) = \phi(p, q)$. Also $2^m \cdot 3^n = 2^p \cdot 3^q$. Nach der Primzahlzerlegung gilt $m = p$, $n = q$. Deshalb ist ϕ injektiv. Nach (i) ist $\mathbb{N}^2$ abzählbar.

Zu (iv): Jede der Mengen A_k lässt sich in der Form

$$A_k = \{a_{k_n} \mid 0 \leq n \leq p_k\} \quad \text{oder} \quad A_k = \{A_{k_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

schreiben.

Sind die A_k paarweise disjunkt, so wird die Abbildung $\phi: \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \rightarrow \mathbb{N}^2$ durch die Nummerierung $a_{k_n} \mapsto (k, n)$ definiert. Man sieht, dass ϕ injektiv ist.

Nach (i) ist $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ höchstens abzählbar.

Im Allgemeinen betrachtet man $B_1 := A_1$, $B_2 := A_2 \setminus A_1$, $B_3 := A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, ... usw. Da $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ und B_k paarweise disjunkt sind, nach dem ersten Teil des Beweises, ist $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ höchstens abzählbar. □

Satz 1.6.3. $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, $\mathbb{Z}$ ist abzählbar.

Beweis. Setze $\mathbb{N}_- := \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 0\}$ und $\phi: \mathbb{N}_- \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto -n$ bijektiv $\implies \mathbb{N}_-$ ist abzählbar. Da $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$, bekommt man, dass $\mathbb{Z}$ abzählbar ist.

Ähnlicherweise betrachtet man

$$\mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}, \quad \mathbb{Q}_- := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}.$$

Man hat $\mathbb{Q}_+ \sim \mathbb{Q}_-$ mithilfe der Bijektion $x \mapsto -x$.

Setze

$$A_q := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{N} \right\} \quad \forall q \in \mathbb{N}.$$

Bemerke

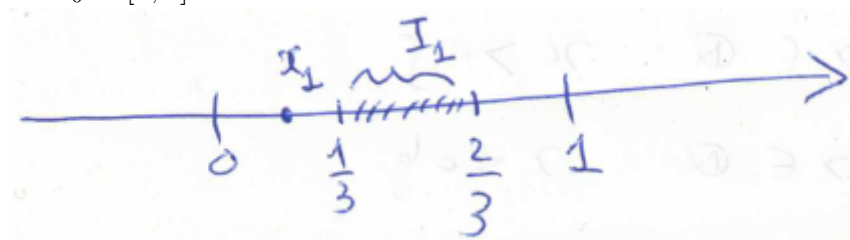
$$\mathbb{Q}_+ = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N} \right\} = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} A_q.$$

Nach Satz 1.6.2 ist $\mathbb{Q}_+$ abzählbar. Daher ist $\mathbb{Q}_-$ auch abzählbar. Folglich ist $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$ abzählbar. □

Satz 1.6.4. $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Beweis. Angenommen, $\mathbb{R}$ wäre abzählbar. Schreibe $\mathbb{R} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Wir konstruieren eine Familie der kompakten Intervalle $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $|I_n| = \frac{1}{3^n}$ und $x_n \notin I_n \forall n$ und $I_{n+1} \subset I_n$ (insbesondere ist $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung).

Sei $I_0 = [0, 1]$.



Sei $I_1 = [a_1, b_1]$ eines der Intervalle $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$, das x_1 nicht enthält. Sei I_2 eines der Intervalle

$$\left[a_1, a_1 + \frac{b_1 - a_1}{3} \right], \quad \left[a_1 + \frac{b_1 - a_1}{3}, a_1 + \frac{2}{3}(b_1 - a_1) \right], \quad \left[a_1 + \frac{2}{3}(b_1 - a_1), b_1 \right],$$

das x_2 nicht enthält. Bemerke $|I_0| = 1$, $|I_1| = \frac{1}{3}$, $|I_2| = \frac{1}{3^2}$ und $I_2 \subset I_1 \subset I_0$.

Wir wiederholen das Verfahren, um $I_3, I_4, \dots$ usw. zu erhalten, d.h. wir bekommen $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit:

$$x_n \notin I_n, \quad I_{n+1} \subset I_n, \quad |I_n| = \frac{1}{3^n}, \quad I_n \text{ kompakt.}$$

Beachte $3^n = (1+2)^n \geq 1+2n \geq n$. Nach dem Satz von Eudoxus:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n: \frac{1}{n} < \varepsilon \implies \frac{1}{3^n} < \varepsilon \implies |I_n| < \varepsilon.$$

Folglich ist $(I_n)_n$ eine Intervallschachtelung. Satz 1.5.11 besagt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Andererseits, denn $x_n \notin I_n \forall n$. Man bekommt

$$\underbrace{\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{=\mathbb{R}} \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \right) = \emptyset$$

Widerspruch! Deshalb ist $\mathbb{R}$ überabzählbar. □

1.7 Der Körper der komplexen Zahlen

Erinnere, dass $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$. Deshalb gibt es keine reelle Zahl x mit $x^2 = -1$. Wir konstruieren nun einen Körper, in dem die Gleichung $x^2 = -1$ eine Lösung hat.

Auf $\mathbb{R}^2$ führen wir eine Addition und Multiplikation wie folgt ein:

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v), \quad (x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Satz 1.7.1. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ist ein Körper mit Nullelement $(0, 0)$ und Einselement $(1, 0)$. Dieser Körper heißt Körper der komplexen Zahlen, bezeichnet mit $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Der Körper sieht ein bisschen künstlich aus. Aber seine geometrische Deutung wird später erklärt.

Beweis. Die Körperaxiome werden direkt überprüft. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist das zu (x, y) multiplikative Element gleich

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

□

Satz 1.7.2. Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto (x, 0)$ hat die Eigenschaften:

- i) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,
- ii) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$,
- iii) $\varphi(1) = (1, 0)$.

(Man sagt, φ ist ein Körper-Homomorphismus.)

Beweis.

$$(x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0), \quad (x, 0)(y, 0) = (xy, 0)$$

□

Die komplexen Zahlen $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ formen einen Körper mit der induzierten Addition und Multiplikation von $\mathbb{C}$. Wir sagen, dass $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist. Da der Homomorphismus $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ bijektiv ist (d.h. φ Isomorphismus), identifizieren wir $\mathbb{R}$ mit $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und sagen, dass $\mathbb{R}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.

Wir schreiben für $(x, 0)$ kurz x , also 0 für $(0, 0)$, 1 für $(1, 0)$, usw.

Definition 1.7.3. Die (nicht-reelle) Zahl $i := (0, 1)$ heißt imaginäre Einheit. Es gilt

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (0^2 - 1^2, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Wir schreiben nun

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + iy.$$

Dann heißt x Realteil von $z = (x, y)$, und y heißt Imaginärteil von z , geschrieben $\operatorname{Re} z := x$, $\operatorname{Im} z := y$.

Definition 1.7.4. Die konjugierte Zahl zu $z = x + iy$ ist $\bar{z} := x - iy$.

Satz 1.7.5 (Rechenregeln). $\forall z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

- (i) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- (ii) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$
- (iii) $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$, $z = -\bar{z} \iff z \in i\mathbb{R}$ (wobei $i\mathbb{R} := \{iy \mid y \in \mathbb{R}\}$)
- (iv) $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$ für $z = x + iy$.
- (v) $\overline{\bar{z}} = z$

Definition 1.7.6. $\forall z \in \mathbb{C}$ heißt $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ den Betrag von z . Wenn $z \in \mathbb{R}$, ist $|z| = \sqrt{z^2}$ der übliche Betrag von reeller Zahl z .

Satz 1.7.7 (Rechenregeln für den Betrag). $\forall z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

- (i) $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \iff z = 0$
- (ii) Ist $z \neq 0$, so ist $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- (iii) $|\bar{z}| = |z|$
- (iv) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- (v) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- (vi) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn eine der folgenden Aussagen gilt:

Woche 6

(a) $z = 0$ oder $w = 0$

(b) $z \neq 0$ und $w \neq 0$ und $\frac{z}{w} \in \mathbb{R}_+$ (Menge der positiven Zahlen)

(vii) $||z| - |w|| \leq |z - w|$ (umgekehrte Dreiecksungleichung)

Beweis. Wir zeigen nur (vi), (vii).

$$\begin{aligned}|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) \\&= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\&= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\&= |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\&= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\&\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \quad \text{nach (iv)} \\&= (|z| + |w|)^2\end{aligned}$$

Folglich gilt $|z + w| \leq |z| + |w|$.

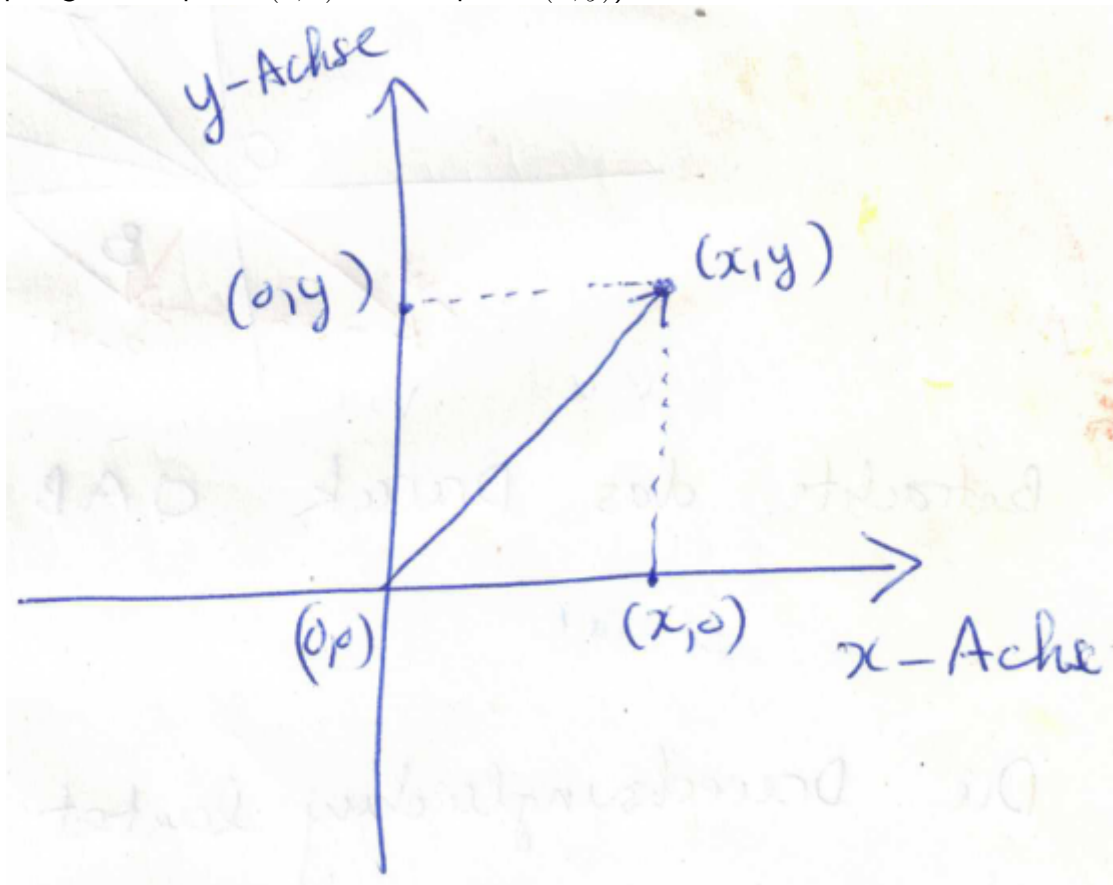
Die Aussage (vii) folgt aus (vi) nach Begründung wie im Beweis von Satz 1.2.5 (d). $\square$

Geometrische Deutung der komplexen Zahlen (Gauß'sche Zahlenebene)

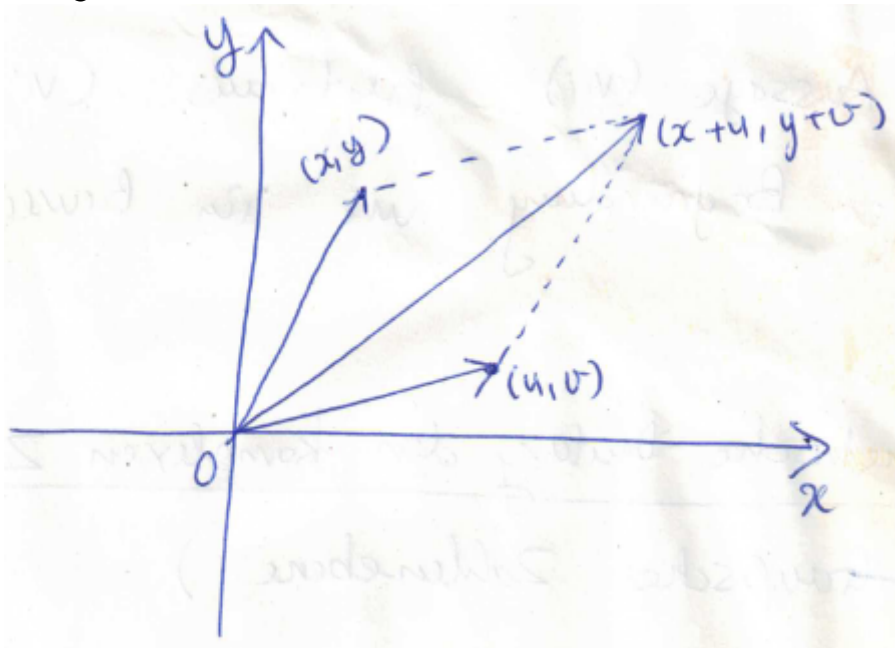
Wir stellen

$$z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

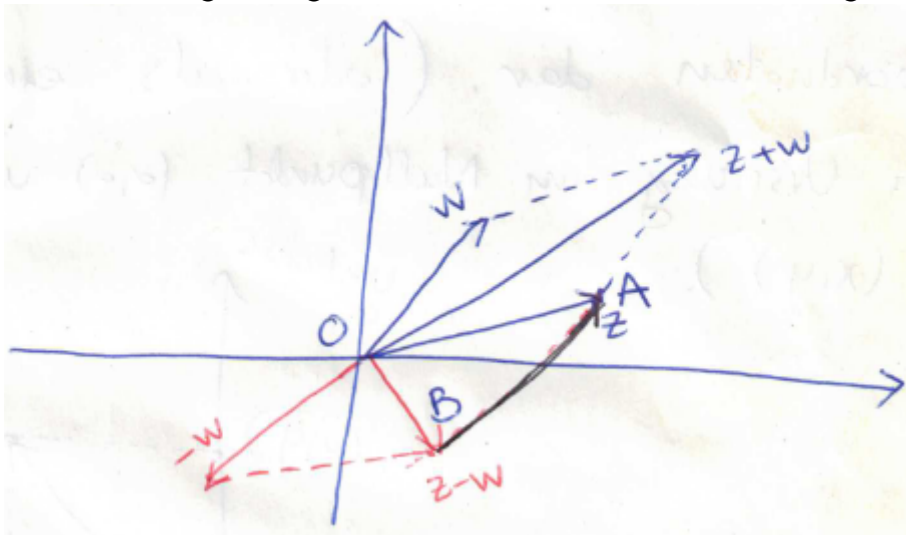
als einen Punkt in der Ebene mit kartesischen Koordinaten dar (oder als einen Vektor mit Ursprung im Nullpunkt $(0, 0)$ und Endpunkt (x, y)).



Die Addition komplexer Zahlen ist dann die übliche Vektoraddition nach der Parallelor-
grammregel.



Die Dreiecksungleichung lässt sich auch veranschaulichen wie folgt:



2 Folgen und Konvergenz

2.1 Definition und Beispiele

Definition 2.1.1. (i) Sei $A \neq \emptyset$. Sei $q \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{\geq q} := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq q\}$. Eine Abbildung $f: \mathbb{Z}_{\geq q} \rightarrow A$ heißt Folge in A . Ist $a_n := f(n)$, so schreibt man f als $(a_n)_{n \geq q}$. Ist $q = 1$, so bezeichnet man $(a_n)_{n \geq 1}$ auch mit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Die Elemente a_n heißen Glieder der Folge.

Der Einfachheit halber betrachten wir in der Theorie nur Folgen mit Indexmenge $\mathbb{N}$, in der Praxis treten auch Folgen mit Indexmenge $\mathbb{Z}_{\geq q}$ auf.

(ii) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es $a \in \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle n mit $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Man beachte, dass $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ im Allgemeinen von ε abhängt. Diese Definition lautet formal:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergent} \iff \exists a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \varepsilon$$

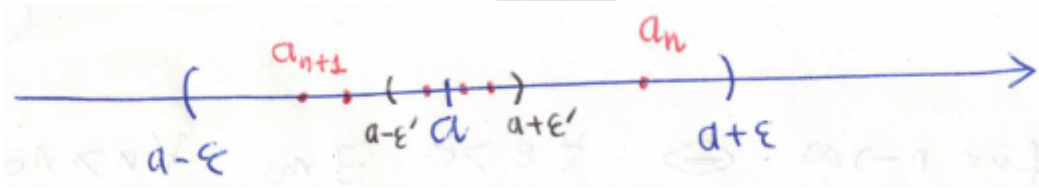
In diesem Fall heißt die Zahl a Grenzwert oder Limes der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und man schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty$$

(gelesen: a_n strebt gegen a für n gegen unendlich)

(iii) Konvergiert eine Folge gegen 0, so heißt sie Nullfolge.

(iv) Eine nicht konvergente Folge heißt divergent.



Beachte:

$$\begin{aligned} |a_n - a| < \varepsilon &\iff -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \\ &\iff a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \end{aligned}$$

Bemerkung. Im Konvergenzfall ist der Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt. Wären $a' \neq a$ zwei Grenzwerte, so gäbe es zu $\varepsilon := \frac{1}{3}|a' - a| > 0$ Indizes N und N' derart, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N, \quad |a_n - a'| < \varepsilon \quad \forall n > N'.$$

Für $n > \max N, N'$ gilt dann

$$0 < |a - a'| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a' - a|.$$

Widerspruch!

Definition 2.1.2. Sei $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Die Menge $B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ heißt ε -Umgebung von a . Jede Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$, zu der es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subset U$ gibt, heißt Umgebung von a . Man hat:

$$a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0: a_n \in B_\varepsilon(a).$$

Beispiel.

(i) Wenn $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}$, so heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konstante Folge. In diesem Fall hat man $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ trivialerweise.

(ii) Die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. Denn sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Satz von Archimedes (Eudoxus) $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0(\varepsilon)} < \varepsilon$. Damit ist

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon).$$

(iii) Die Folge $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ ist divergent.

Beweis. Angenommen, die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen eine reelle Zahl a . Schreibe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie folgt:

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad \text{oder} \quad -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

Dann gibt es nach Definition zu $\varepsilon := \frac{1}{2}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0$. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Widerspruch! □

Satz 2.1.3. *Es gilt*

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} = 0, \forall s \in \mathbb{Q}, s > 0$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0, \forall a \in \mathbb{R} \text{ mit } |a| < 1$
- (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s}{a^n} = 0, \forall s \in \mathbb{Q} \text{ und } \forall a \in \mathbb{R} \text{ mit } |a| > 1$

Beweis. **Zu (i):** Sei $\varepsilon > 0$. Sei $n_0(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{s}}}$, $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$. Für $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt

$$\left| \frac{1}{n^s} - 0 \right| = \frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{(n_0(\varepsilon))^s} < \left(\varepsilon^{\frac{1}{s}} \right)^s = \varepsilon.$$

Zu (ii): Wir zeigen, $|\sqrt[n]{a} - 1|$ ist klein, wenn n groß ist. Setze $x_n := \sqrt[n]{a} - 1$. Wir schätzen x_n ab. Betrachte zwei Fälle:

Fall 1: $a \geq 1$. Dann $x_n \geq 0$ (da $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{1} = 1$). Bernoulli-Ungleichung impliziert

$$a = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n > nx_n.$$

Daraus folgt $0 \leq x_n \leq \frac{a}{n}$. Anders gesagt $0 \leq |\sqrt[n]{a} - 1| \leq \frac{a}{n}$. Beachte, $\frac{a}{n}$ ist klein, wenn n groß ist. Genauer gesagt $\forall \varepsilon > 0$, wähle $n_0 > \frac{a}{\varepsilon}$. Dann für $n \geq n_0$: $\frac{a}{n} \leq \frac{a}{n_0} < \varepsilon$. Es folgt $|\sqrt[n]{a} - 1| \leq \frac{a}{n} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$. Daher gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Fall 2: $0 < a < 1$. Dann ist $\frac{1}{a} > 1$. Nach Fall 1 gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$. Da $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$, bekommt man $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1$, d.h.

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists n_{\varepsilon_1} > 0, n_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N} \text{ so dass } \left| \frac{1}{\sqrt[n]{a}} - 1 \right| < \varepsilon_1 \quad \forall n \geq n_{\varepsilon_1}.$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned} & |1 - \sqrt[n]{a}| < \varepsilon_1 \sqrt[n]{a} \\ \Leftrightarrow & -\varepsilon_1 \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon_1 \sqrt[n]{a} \\ \Leftrightarrow & \sqrt[n]{a} < \frac{1}{1 - \varepsilon_1}, \quad \sqrt[n]{a} > \frac{1}{1 + \varepsilon_1} \end{aligned}$$

Man erhält

$$\frac{-\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1} \quad \forall n \geq n_{\varepsilon_1}.$$

Nun betrachte $\varepsilon > 0$. Wähle $\varepsilon_1 > 0$ mit $\frac{\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1} < \varepsilon$ und $\frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} < \varepsilon$ (z.B. löst man die Ungleichungen, bekommt man $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$). Folglich gilt $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_{\varepsilon_1}$.

Daher gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

□

Hinweis zu (iii): $\sqrt[n]{n} \geq 1$ da $n \geq 1$. Setze $x_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$.

$$\begin{aligned} n &= (1 + x_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} x_n^2 \\ \Rightarrow & n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \\ \Rightarrow & x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \\ \Rightarrow & x_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Hinweis zu (iv): Setze $\frac{1}{|a|} = 1 + x$, $x > 0$.

$$\frac{1}{|a|^n} = (1 + x)^n \geq 1 + nx > nx.$$

Daher gilt $|a|^n < \frac{1}{nx} \Rightarrow a^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Hinweis zu (v): Es genügt, $s > 0$ zu betrachten: Schreibe $|a| = 1 + x$, $x > 0$. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > s + 1$. Für $n > 2k$ gilt

$$\begin{aligned} (1 + x)^n &> \binom{n}{k} x^k = n(n-1) \dots (n-k+1) \frac{1}{k!} x^k \\ &> \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{x^k}{k!} \\ \Rightarrow & \left| \frac{n^s}{a^n} \right| < n^s \frac{k!}{x^k} \frac{2^k}{n^k} = \frac{2^k k!}{x^k n^{k-s}} \\ & < \underbrace{\frac{2^k k!}{x^k}}_{\text{klein, wenn } n \text{ groß ist}} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Definition 2.1.4. (i) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn es $M > 0$ gibt, mit $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- (ii) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} (\subset \mathbb{R})$ heißt monoton wachsend (steigend), wenn $a_n \leq a_{n+1} \forall n$.
 Eine Folge heißt monoton fallend, wenn $a_n \geq a_{n+1} \forall n$.
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt streng monoton wachsend (bzw. strng monoton fallend), wenn $a_n < a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ (bzw. $a_n > a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$).

Satz 2.1.5 (Monotonieprinzip). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, $a := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- (i) Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt ist, so gilt $a_n \rightarrow \sup A$ für $n \rightarrow \infty$.
 (ii) Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt ist, so gilt $a_n \rightarrow \inf A$ für $n \rightarrow \infty$.

Beweis. Zu (i): Setze $a := \sup A$. Dann gibt es n_0 mit $a_{n_0} > a - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ gegeben). Folglich für $n \geq n_0$ gilt

$$a - \varepsilon < \underbrace{a_{n_0} < a_n}_{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ monoton wachsend}} \leq a.$$

Deshalb erhält man $|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0$. Damit $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$.

Zu (ii): Analog. □

Bemerkung 2.1.6. (i) Sei $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Intervallen in $\mathbb{R}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n \leq b_n$. Man sieht:

$$(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine Intervallschachtelung} \iff \begin{cases} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist monoton wachsend} \\ (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist monoton fallend} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \end{cases}$$

In diesem Fall besagen die Sätze 1.5.11 & 2.1.5 (Intervallschachtelungsprinzip), dass $\exists x \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Die Zahl $x = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \inf \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- (ii) Daher impliziert der Satz 1.5.12, dass $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$, $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \rightarrow e$, $n \rightarrow \infty$.

(iii) Sei

$$a_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Beachte, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, und

$$1 \leq a_n$$

denn $k! \geq 2^{k-1} \forall k \geq 1$

$$\begin{aligned} &\leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

(Erinnere: $1 - b^n = (1 - b)(1 + b + b^2 + \cdots + b^{n-1}) \forall b \in \mathbb{R}$)

Also konvergiert a_n gegen eine Zahl in $(2, 3)$. Man kann zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ (die Eulersche Zahl).

Satz 2.1.7. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

Beweis. Sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Sei $\varepsilon = 1$. Dann $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon = 1 \quad \forall n \geq n_0$. Folglich

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq |a| + 1 \quad \forall n \geq n_0.$$

Daher

$$|a_n| \leq M := \max \{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, |a| + 1\} \quad \forall n.$$

□

Bemerkung.

(i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbeschränkt $\implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent (wegen des Satzes 2.1.7), z.B.

- $a_n := n \quad \forall n$, $(a_n)_n$ divergent
- $a_n := (-1)^n \quad \forall n$, $(a_n)_n$ divergent

(ii) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht unbedingt konvergent, z.B. $a_n := (-1)^n \quad \forall n$: diese Folge ist beschränkt und nicht konvergent.

(iii) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent

$$\iff \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 : |a_n - a| > \varepsilon$$

$$\iff \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ unendlich viele } n \in \mathbb{N} \text{ mit } a + n \notin U_\varepsilon := (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

2.2 Rechnen mit konvergenten Folgen

Satz 2.2.1. Seien (a_n) , (b_n) Folgen mit $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt

(i) $a_n + b_n \rightarrow a + b$, $\lambda a_n \rightarrow \lambda a$ für $\lambda \in \mathbb{R}$

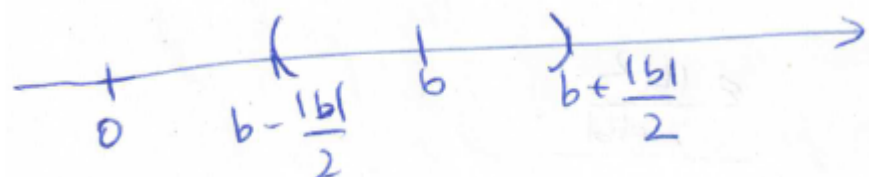
(ii) $a_n b_n \rightarrow ab$

(iii) Ist $b \neq 0$, so ist $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$ und $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$ ist konvergent mit $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$.

(iv) $|a_n| \rightarrow |a|$

(v) Ist (c_n) beschränkt und $a_n \rightarrow 0$, so gilt $a_n c_n \rightarrow 0$.

Beweis. Zu (iii): Sei $U = \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right)$ eine Umgebung von b . Da $b_n \rightarrow b$, gibt es n_0 so dass $\forall n \geq n_0$ gilt $b_n \in U$.



Da $0 \notin U$, bekommt man $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$.

Zu $\delta > 0$ wähle $n_\delta \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq n_\delta$ gilt $|b_n - b| < \delta$.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir suchen nach einer Zahl $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon \quad \forall n_0 \geq n_0(\varepsilon).$$

Betrachte

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \frac{\delta}{(|b| - \delta)|b|} \quad \forall n \geq n_\delta \quad \forall \delta > 0, \delta < |b|$$

(weil: $|b_n| \geq |b| - |b_n - b|$)

Wir wollen

$$\frac{\delta}{(|b| - \delta)|b|} < \varepsilon. \quad (7)$$

Dazu wählen wir eine geeignete positive Zahl δ (ausreichend klein):

Idee: Entweder man löst (7), oder man beachtet den Nenner:

$$(|b| - \delta)|b| \approx |b|^2,$$

daher

$$\frac{\delta}{(|b| - \delta)|b|} \approx \frac{\delta}{|b|^2}, \quad \frac{\delta}{|b|^2} < \varepsilon \iff \delta < \varepsilon|b|^2$$

Dies rechtfertigt die Wahl

$$\delta := \min \left\{ \frac{|b|}{2}, \frac{\varepsilon|b|^2}{2} \right\}.$$

Man hat

$$\frac{\delta}{(|b| - \delta)|b|} \leq \frac{1}{2} \frac{\varepsilon|b|^2}{\left(|b| - \frac{|b|}{2}\right)|b|} = \varepsilon$$

Folglich

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| &< \varepsilon \quad \forall n \geq n_\delta \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} &= \frac{1}{b} \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{a}{b} \quad (\text{nach (ii)}) \end{aligned}$$

□

Satz 2.2.2. Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ für $n \rightarrow \infty$. Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq N$, dann gilt $a \leq b$.

Beweis. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \quad b_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Es folgt

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Insbesondere gilt

$$a < b + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies a - b < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Daher $a - b \leq 0$ (weil: wenn $a - b > 0$, wähle $\varepsilon := \frac{a-b}{2} \implies 0 < a - b < \frac{a-b}{2}$ Woche 7 Widerspruch!) □

Bemerkung. Auch wenn $a_n < b_n \quad \forall n$, folgt nur $a \leq b$; z.B. $a_n = -\frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n}$. Man hat $a_n \rightarrow a = 0, b_n \rightarrow b = 0$.

Folgerung 2.2.3. Sei (a_n) eine konvergente Folge und $a_n \in [b, c]$ für $n \geq N$ (N vorgegeben). Dann gilt $a \in [b, c]$, wobei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Beweis. Betrachte $b_n := b \forall n$, $c_n := c \forall n$. Da $a_n \geq b_n \forall n \geq N$ und $a_n \leq c_n \forall n \geq N$, folgt, nach Satz 2.2.2, dass $a \geq b$ und $a \leq c \implies a \in [b, c]$. $\square$

Satz 2.2.4 (Einschließungsprinzip). Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$. Sei (c_n) eine weitere Folge, so dass $\exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq N.$$

Dann ist (c_n) konvergent und $c_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n_0$ gilt

$$a_n, b_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

also

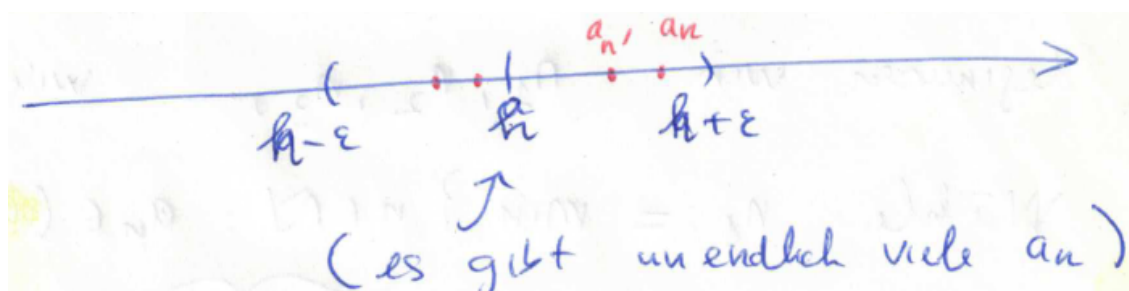
$$c_n \in [a_n, b_n] \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \forall n \geq \max\{n_0, N\}.$$

Es folgt $c_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$. $\square$

2.3 Der Satz von Bolzano-Weierstraß und das Cauchy-Kriterium

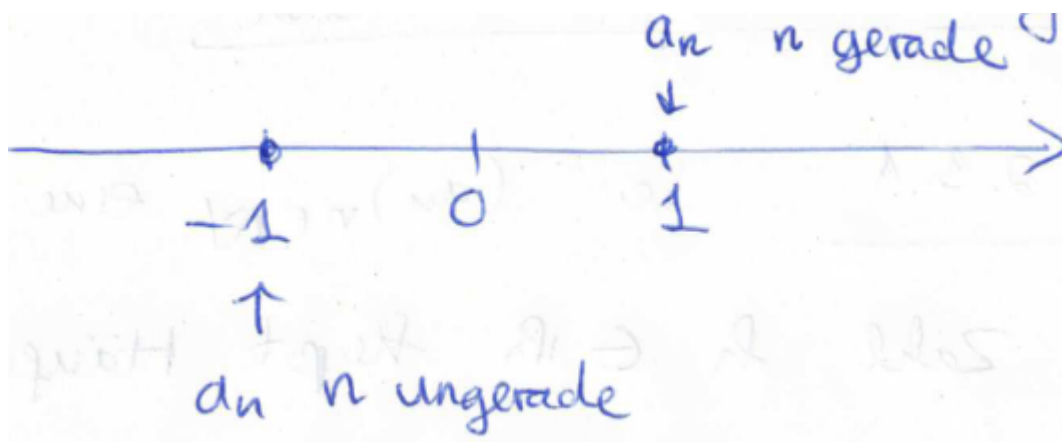
Definition 2.3.1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

- (i) Eine Zahl $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungswert von (a_n) , wenn $\forall \varepsilon > 0$ gilt: $a_n \in B_\varepsilon(h)$ ($= (h - \varepsilon, h + \varepsilon)$) für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Ist $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ($n_1 < n_2 < \dots$) eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$, so heißt $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ (d.h. $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$) eine Teilfolge von (a_n) .



Beispiel.

- (i) Ist (a_n) konvergent, so ist $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ein Häufungswert von (a_n) .
- (ii) Die Folge $a_n = (-1)^n \forall n \in \mathbb{N}$ hat -1 und 1 als Häufungswerte.



Satz 2.3.2. Eine Zahl $h \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert von (a_n) genau dann, wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen h konvergiert.

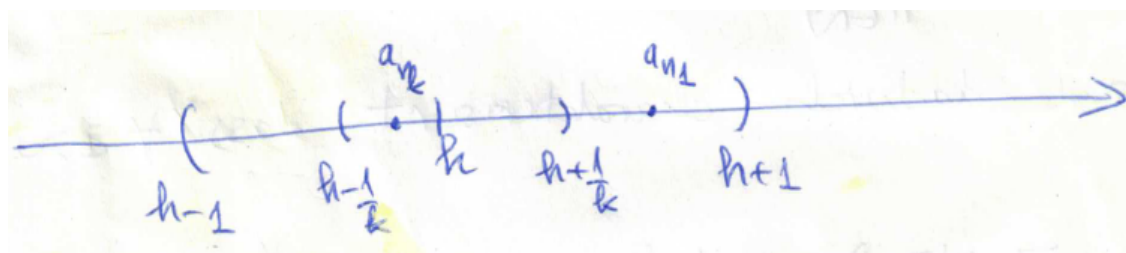
Beweis. „ $\Rightarrow$ “: Sei h ein Häufungswert von (a_n) . Wir definieren $n_1, n_2, \dots$ wie folgt: Wähle

$$\begin{aligned}
 n_1 &:= \min \underbrace{\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in (h-1, h+1)\}}_{\neq \emptyset, \text{ da } h \text{ ein Häufungswert von } (a_n).} \\
 n_2 &:= \min \underbrace{\left\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_1, a_n \in \left(h - \frac{1}{2}, h + \frac{1}{2}\right)\right\}}_{\neq \emptyset, \text{ da die Menge } \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in (h - \frac{1}{2}, h + \frac{1}{2})\} \text{ unendlich ist}} \\
 &\vdots \\
 n_{k+1} &:= \min \left\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_k, a_n \in \left(h - \frac{1}{k+1}, h + \frac{1}{k+1}\right)\right\} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Daher gilt $n_1 < n_2 < \dots$, also ist $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n) , und

$$|a_{n_k} - h| < \frac{1}{k} \quad \forall k.$$

Folglich gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = h$.



„ $\Leftarrow$ “: Sei $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $a_{n_k} \rightarrow h$ für $k \rightarrow \infty$. Dann $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$ mit $a_{n_k} \in (h - \varepsilon, h + \varepsilon) \forall k > N_\varepsilon \implies \exists$ unendlich viele a_n , die in $(h - \varepsilon, h + \varepsilon)$ liegen. $\square$

Satz 2.3.3 (Satz von Bolzano-Weierstraß). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann hat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungswert. Genauer gesagt, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat einen größten Häufungswert h^* und einen kleinsten Häufungswert h_* , definiert durch

$$h^* := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup \{a_k \mid k \geq n\}, \quad h_* := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf \{a_k \mid k \geq n\}.$$

Diese sind dadurch charakterisiert, dass $\forall \varepsilon > 0$ gilt:

- $\exists N > 0$ mit $h_* - \varepsilon < a_n < h^* + \varepsilon \quad \forall n \geq N$.
- $a_n < h_* + \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.
 $a_n > h^* - \varepsilon$ auch für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Man nennt h^* den oberen Limes oder Limes Superior, h_* den unteren Limes oder Limes Inferior der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und schreibt dafür

$$h^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad h_* = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Beweis. Sei $M > 0$ mit $a_n \in [-M, M] \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Setze $b_n := \sup \{a_k \mid k \geq n\} \subset \mathbb{R}$ (da (a_n) beschränkt ist) $c_n := \inf \{a_k \mid k \geq n\} \subset \mathbb{R}$. Beachte $b_n \geq b_{n+1}$, $c_n \leq c_{n+1}$ und $b_n \geq c_n \quad \forall n$.
 $\implies (b_n)_n$ beschränkte monoton fallende Folge, $(c_n)_n$ beschränkte monoton wachsende Folge.
 Nach Monotonieprinzip gilt

$$b_n \rightarrow \inf \{b_m \mid m \in \mathbb{N}\} = h^*, \quad c_n \rightarrow \sup \{c_m \mid m \in \mathbb{N}\} = h_*$$

da $b_n \geq c_n$, gilt $h^* \geq h_*$ (Satz 2.2.2).

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz $c_n \rightarrow h_*$ und $b_n \rightarrow h^* \exists N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$h^* \leq b_n \leq h^* + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1,$$

$$h_* - \frac{\varepsilon}{2} \leq c_n \leq h_*.$$

Es folgt

$$a_n \leq b_n \leq h^* + \frac{\varepsilon}{2}, \quad a_n \geq c_n \geq h_* - \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1.$$

Sei $k \geq N_1$. Nach Definition des Supremums (Infimums) gilt

$$\exists n_k \geq k \text{ mit } b_k \geq a_{n_k} \geq b_k - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \exists n'_k \geq k \text{ mit } c_k \leq a_{n'_k} \leq c_k + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus folgt:

$$h^* + \frac{\varepsilon}{2} \geq a_{n_k} \geq h^* - \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N_1$$

$\implies a_n > h^* - \frac{\varepsilon}{2}$ für unendlich viele n und

$$h_* - \frac{\varepsilon}{2} < a_{n'_k} < h_* + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \geq N_1$$

$\implies a_n < h_* + \frac{\varepsilon}{2}$ für unendlich viele n . Daher sind h^*, h_* Häufungswerte von (a_n) .

Sei h ein weiterer Häufungswert von (a_n) . Satz 2.3.2 besagt, $\exists$ eine Teilfolge $(a_{n''_k})_k$ von (a_n) mit $a_{n''_k} \rightarrow h$ für $k \rightarrow \infty$. Da $n''_k \geq k \quad \forall k$, bekommt man

$$\begin{array}{ccccc} c_k & \leq & a_{n''_k} & \leq & b_k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \implies h_* & \leq & h & \leq & h^* \quad (\text{wegen Satz 2.2.2}) \end{array}$$

□

Folgerung 2.3.4. (a_n) ist konvergent $\iff (a_n)$ ist beschränkt und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. In diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Definition 2.3.5. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Satz 2.3.6 (Cauchy-Kriterium). Eine Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition der Konvergenz

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Folglich erhält man

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Anders gesagt, (a_n) ist eine Cauchy-Folge.

„ $\Leftarrow$ “: Wir nehmen an, (a_n) ist eine Cauchy-Folge, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon.$$

Es folgt

$$|a_m| \leq |a_{n_\varepsilon}| + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq N_\varepsilon.$$

Daher ist (a_n) beschränkt. Nach Bolzano-Weierstraß $\exists$ Häufungswert h von (a_n) .

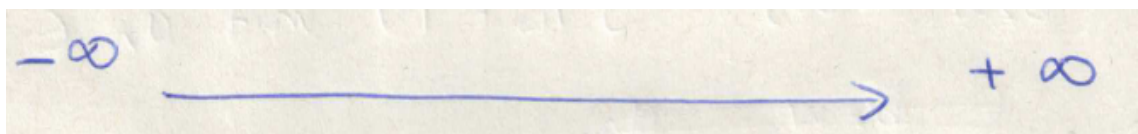
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{n} > N_\varepsilon: |a_{\tilde{n}} - h| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Damit gilt

$$|a_m - h| \leq |a_m - a_{\tilde{n}}| + |a_{\tilde{n}} - h| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq N_\varepsilon.$$

Es folgt $a_m \rightarrow h$ für $m \rightarrow \infty$. □

Definition 2.3.7. (i) Wir definieren $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, wobei $-\infty \notin \mathbb{R}$, $+\infty \notin \mathbb{R}$ zwei (abstrakte) Elemente sind. Wir erweitern die Ordnungsrelation in $\mathbb{R}$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$. $\overline{\mathbb{R}}$ heißt die erweiterte Zahlengerade.



(ii) Für $A \subset \mathbb{R}$ beliebig, definieren wir $\sup A \in \overline{\mathbb{R}}$ als die kleinste obere Schranke von A in $\overline{\mathbb{R}}$ und $\inf A \in \overline{\mathbb{R}}$ als die größte untere Schranke von A in $\overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sup A = \infty &\iff A \text{ ist nach oben unbeschränkt,} \\ \inf A = -\infty &\iff A \text{ ist nach unten unbeschränkt.} \end{aligned}$$

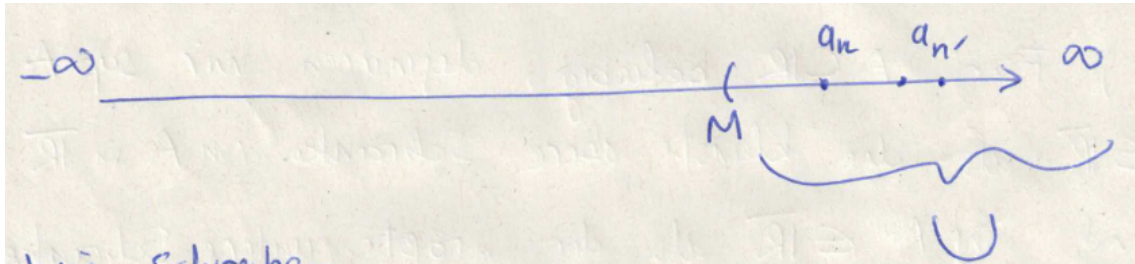
(iii) Sei $a \in \mathbb{R}$. Setze

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \infty\}, \quad (a, \infty] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leq \infty\}$$

und analog $[a, \infty)$, $[a, \infty]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$ usw.

Eine Menge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt Umgebung von ∞ in $\overline{\mathbb{R}}$ (bzw. $-\infty$ in $\overline{\mathbb{R}}$), falls es $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $(M, \infty] \subset U$ (bzw. $(-\infty, M) \subset U$).

(iv) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt divergent in $\mathbb{R}$ gegen ∞ (bzw. $-\infty$), wenn für jede Umgebung U von ∞ (bzw. $-\infty$) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U \forall n \geq n_0$.



Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ oder $a_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$, und analog für $-\infty$.

Die Folge heißt in diesem Fall auch bestimmt divergent in $\mathbb{R}$. Man nennt ∞ (bzw. $-\infty$) den uneigentlichen Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(v) Eine Folge heißt konvergent in $\overline{\mathbb{R}}$, wenn sie konvergent in $\mathbb{R}$ ist oder divergent gegen ∞ oder $-\infty$ ist, geschrieben $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Konvergiert eine Folge nicht in $\overline{\mathbb{R}}$, so heißt sie divergent in $\overline{\mathbb{R}}$ oder unbestimmt divergent.

(vi) Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ hat ∞ (bzw. $-\infty$) als Häufungswert in $\overline{\mathbb{R}}$, falls $\forall M > 0$ ($M \in \mathbb{R}$) gilt $a_n \in (M, \infty)$ (bzw. $a_n \in (-\infty, -M)$) für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Äquivalent dazu ist: (a_n) besitzt eine Teilfolge, die gegen ∞ (bzw. $-\infty$) divergiert. Dann schreiben wir $\limsup a_n = \infty$ (bzw. $\liminf a_n = -\infty$).

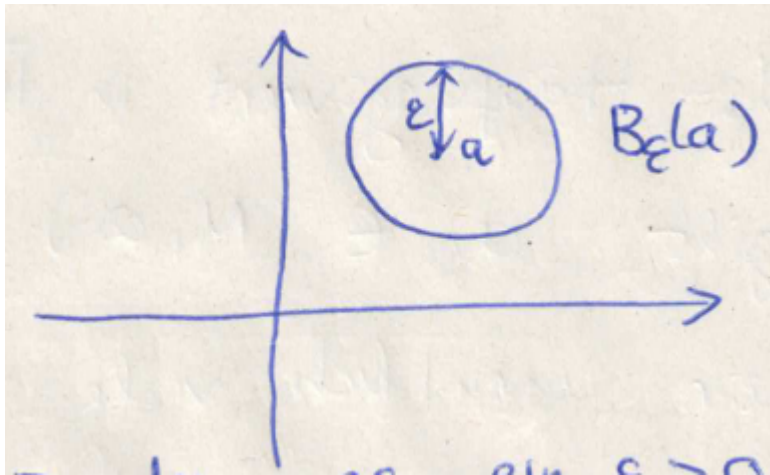
Beispiel.

- (i) Ist $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, so gilt $a_n^{-1} \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^s = \infty$ für $s \in \mathbb{Q}_+$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ für $a > 1$
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \infty$

2.4 Folgen komplexer Zahlen

Woche 8

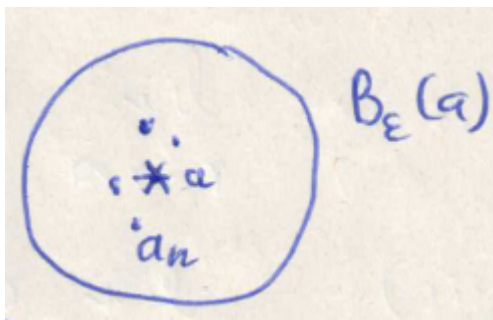
Definition 2.4.1. (i) Sei $a \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Die Menge $B_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \varepsilon\}$ heißt ε -Umgebung von a .



Jede Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$, zu der es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subset U$ gibt, heißt Umgebung von a .

(ii) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ heißt konvergent, wenn

$$\exists a \in \mathbb{C} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \varepsilon \quad (\iff a_n \in B_\varepsilon(a)).$$



Die Zahl a heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Sie ist eindeutig bestimmt (wie im reellen Fall). Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$.

(iii) Eine nicht-konvergente Folge in $\mathbb{C}$ heißt divergent.

Bemerkung. Satz 2.2.1 gilt auch für Folgen in $\mathbb{C}$ (Rechenregeln).

Beispiel.

(i) Ist $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, so gilt $z^n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ ($|z^n - 0| = |z|^n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$).

(ii) Ist $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, so gilt

$$1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \rightarrow \frac{1 - 0}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}$$

für $n \rightarrow \infty$.

Satz 2.4.2. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent genau dann, wenn $(\operatorname{Re} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent sind.

Definition 2.4.3. (i) $h \in \mathbb{C}$ heißt Häufungswert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn $\forall \varepsilon > 0$ gilt $a_n \in B_\varepsilon(h)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

- (ii) Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ heißt beschränkt, wenn es $M > 0$ gibt, mit $|z| \leq M \ \forall z \in A$. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, d.h. wenn es $M > 0$ gibt, mit $|a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Satz 2.4.4 (Cauchy-Kriterium in $\mathbb{C}$). Eine Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ heißt Cauchy-Folge, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0: |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Beweis. Betrachte $a_n = b_n + ic_n$, $b_n, c_n \in \mathbb{R}$. Satz 2.4.2 besagt

$$\begin{aligned} (a_n) \text{ konvergiert} &\iff (b_n) \text{ und } (c_n) \text{ konvergieren} \\ &\iff (b_n) \text{ und } (c_n) \text{ sind Cauchy-Folgen} \\ &\stackrel{\text{Satz 2.3.6}}{\iff} (a_n) \text{ ist Cauchy-Folge.} \end{aligned}$$

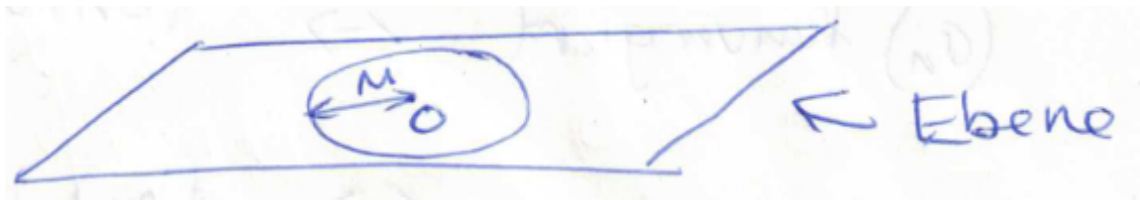
□

Satz 2.4.5 (Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$). Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt einen Häufungswert.

Beweis. Direkt aus Satz 2.3.3 (Satz von Bolzano-Weierstraß für reelle Folgen) und Satz 2.4.2. □

Bemerkung. Satz 2.3.2 gilt auch für komplexe Folgen.

Definition 2.4.6. (i) Wir ergänzen $\mathbb{C}$ durch ein (abstraktes) Element $\infty \notin \mathbb{C}$ und setzen $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Die Menge $\overline{\mathbb{C}}$ heißt erweiterte Zahlenebene.



- (ii) Eine Menge $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ heißt Umgebung von ∞ in $\overline{\mathbb{C}}$, wenn es $M > 0$ gibt, so dass $U \supset \{|z| > M\} \cup \{\infty\}$.

- (iii) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ konvergiert in $\overline{\mathbb{C}}$ gegen ∞ , wenn $\forall$ Umgebung von ∞ gilt (per Definition) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U \ \forall n \geq n_0$. Schreibweise: $a_n \rightarrow \infty$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ in $\overline{\mathbb{C}}$. Beachte,

$$a_n \rightarrow \infty \text{ (in } \overline{\mathbb{C}}) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty \text{ in } \overline{\mathbb{R}}.$$

Beispiel.

- (i) Ist $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$, so gilt $z^n \rightarrow \infty$ in $\overline{\mathbb{C}}$, $n \rightarrow \infty$.
(ii) Falls eine reelle Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ gegen ∞ oder $-\infty$ konvergiert, dann konvergiert sie in $\overline{\mathbb{C}}$ gegen $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

Die umgekehrte Aussage ist falsch. Z.B. sei $a \in \mathbb{R}$, $a < -1$. Dann ist $a^n \rightarrow \infty$ in $\overline{\mathbb{C}}$ (da $\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = \infty$). Aber a^n ist unbestimmt divergent in $\overline{\mathbb{R}}$ (d.h. $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent in $\overline{\mathbb{R}}$ ist).

In einem Modell für $\overline{\mathbb{C}}$ hat man die Sphäre

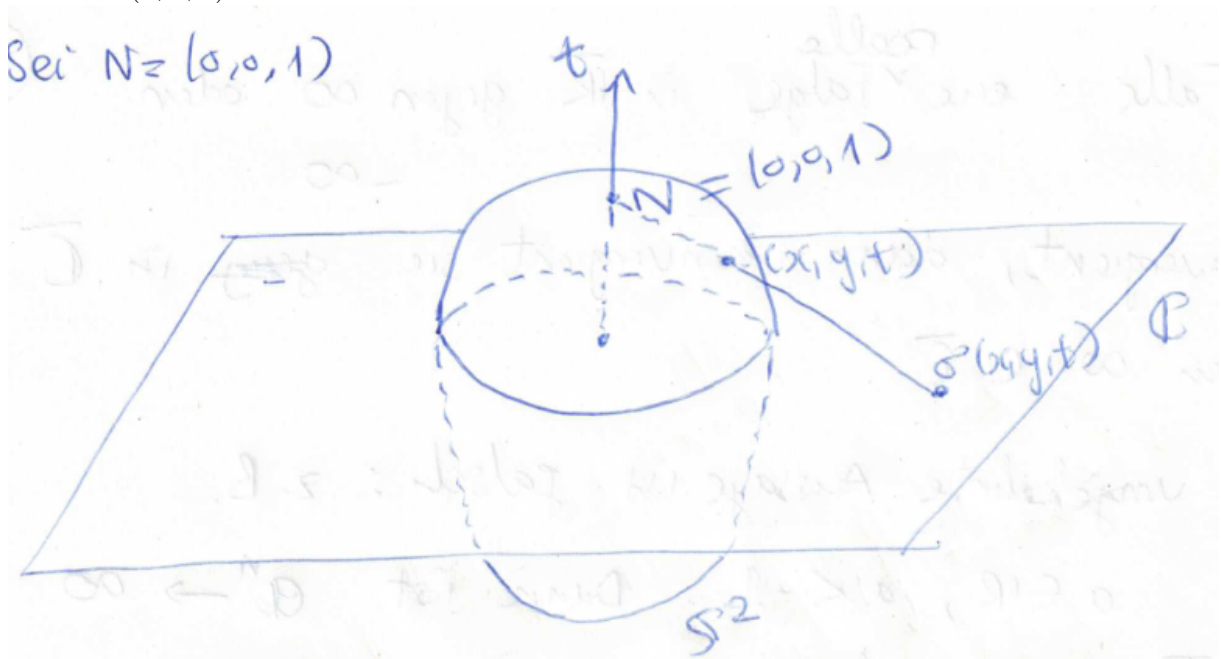
$$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + t^2 = 1\}.$$

In der Tat betrachtet man die stereographische Projektion

$$\sigma: \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}, (x, y, t) \mapsto \sigma(x, y, t).$$

wobei $\sigma(x, y, t)$ der Schnittpunkt der Geraden durch $(0, 0, 1)$ und (x, y, t) mit der Ebene $x \circ y \cong \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

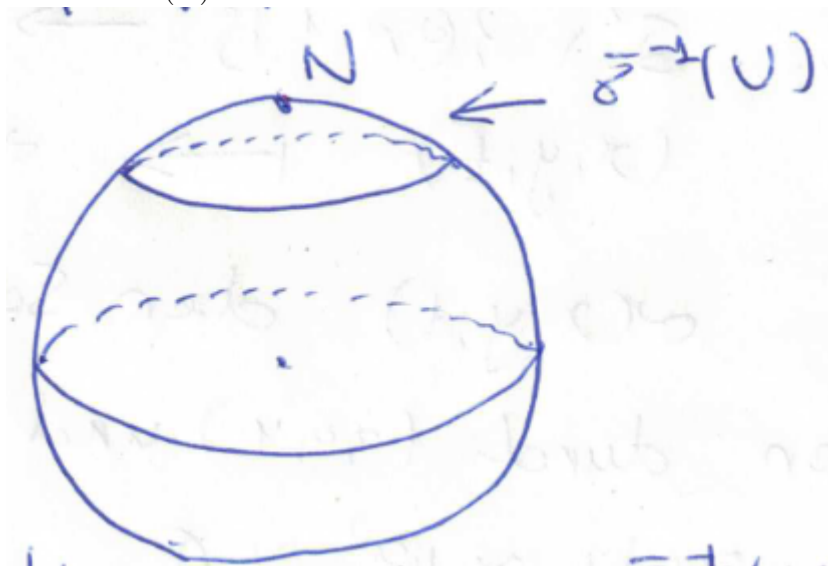
Sei $N = (0, 0, 1)$.



Man sieht, dass σ eine bijektive Abbildung ist. Durch $\bar{\sigma}(0, 0, 1) := \infty$ bekommt man eine bijektive Fortsetzung $\bar{\sigma}: \mathbb{S}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ von σ zu $\mathbb{S}^2$.

Das erlaubt uns, $\overline{\mathbb{C}}$ mit $\mathbb{S}^2$ zu identifizieren. Sei $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > M\} \cup \{\infty\}$, welche eine Umgebung von ∞ in $\overline{\mathbb{C}}$ ist.

Was ist $\bar{\sigma}^{-1}(U)$?



Geometrisch sieht man, dass $\bar{\sigma}^{-1}(U)$ eine Umgebung von N in $\mathbb{S}^2$ ist.

3 Reihen

3.1 Definitionen und Beispiele

Definition 3.1.1. (i) Sei $(a_n)_{n \geq q}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dazu definiere $(s_n)_{n \geq q}$ durch

$$\begin{aligned} s_q &= a_q \\ s_{q+1} &= a_q + a_{q+1} \\ &\vdots \\ s_n &= \sum_{j=q}^n a_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

Das Folgepaar $((a_n)_{n \geq q}, (s_n)_{n \geq q})$ heißt Reihe mit Gliedern a_n und wird mit $\sum_{n \geq q} a_n$ bezeichnet. Die Zahl s_n heißt n-te Partialsumme der Reihe.

(ii) $\sum_{n \geq q} a_n$ heißt konvergent, wenn $(s_n)_{n \geq q}$ konvergent ist. Gilt $s_n \rightarrow s$ in $\mathbb{C}$, so schreibt man $s = \sum_{n=q}^{\infty} a_n$; die Zahl s heißt die Summe der Reihe.

(iii) eine nicht konvergente Reihe heißt divergent. Sind die a_n reell und gilt $s_n \rightarrow \infty$ (bzw. $-\infty$) in $\overline{\mathbb{R}}$, so sagen wir, dass $\sum_{n \geq q} a_n$ bestimmt divergent mit $\sum_{n=q}^{\infty} a_n = \infty$ (bzw. $-\infty$) ist.

Beispiel.

(i) Die Reihe $1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} z^n$ ($z \in \mathbb{C}$) heißt geometrische Reihe. Für $z \neq 1$ gilt

$$s_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Falls $|z| < 1$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = 0$, also $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

(ii) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ ist konvergent und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Satz 3.1.2 (Rechenregeln). Seien $\sum_{n=q}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=q}^{\infty} b_n = b$ in $\mathbb{C}$. Dann gilt:

- (i) $\sum_{n=q}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$,
- (ii) $\sum_{n=q}^{\infty} \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} a$, $\sum_{n=q}^{\infty} \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} a$,
- (iii) $\sum_{n=q}^{\infty} \bar{a}_n = \bar{a}$,
- (iv) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\sum_{n=q}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=q}^{\infty} a_n = \lambda a$.

3.2 Konvergenzkriterien

Satz 3.2.1 (Cauchy-Kriterium). $\sum_{n \geq q} a_n$ ist konvergent genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq q}$ gibt, so dass $\forall n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m \geq n_0$ gilt

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon.$$

Beweis. Beachte

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| = |s_n - s_m|.$$

Daher folgt die gewünschte Äquivalenz aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen. $\square$

Folgerung 3.2.2. (1) $\sum_{n \geq q} a_n$ ist konvergent $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (notwendiges Kriterium für Konvergenz)

(2) Das Ändern endlich vieler a_n ändert nicht das Konvergenzverhalten von $\sum_{n \geq q} a_n$, wohl aber gegebenenfalls die Summe. Genauer gesagt, sei $(b_n)_{n \geq q}$ eine Folge mit $b_n = a_n$ für $n \geq N$ (N eine Zahl $\in \mathbb{N}$). Dann gilt

$$\sum_{n \geq q} b_n \text{ ist konvergent} \iff \sum_{n \geq q} a_n \text{ ist konvergent.}$$

Beweis. Direkt aus Satz 3.2.1. $\square$

Satz 3.2.3 (Majorantenkriterium). Ist $|a_n| \leq b_n \forall n \geq q$ und konvergiert $\sum_{n \geq q} b_n$, so konvergieren auch $\sum_{n \geq q} |a_n|$ und $\sum_{n \geq q} a_n$, und es gilt

$$\left| \sum_{n=q}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=q}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Die Reihe $\sum_{n \geq q} b_n$ heißt Majorante für $\sum_{n \geq q} a_n$.

Beweis. Beachte $b_n \geq 0$, da $b_n \geq |a_n| \geq 0 \forall n \geq q$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Cauchy-Kriterium gilt: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n > m \geq n_0$ gilt

$$\begin{aligned} |b_{m+1} + \cdots + b_n| &< \varepsilon \\ &\parallel \\ |b_{m+1}| + \cdots + |b_n| & \\ &\text{IV} \\ |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| & \\ &\text{IV} \\ |a_{m+1} + \cdots + a_n| & \end{aligned}$$

Deshalb ist $\sum_{n \geq q} a_n$ (und auch $\sum_{n \geq q} |a_n|$) konvergent. $\square$

Satz 3.2.4 (Minorantenkriterium). Falls $a_n \leq b_n \forall n \geq q$ und $\sum_{n=q}^{\infty} a_n = \infty$, dann $\sum_{n=q}^{\infty} b_n = \infty$ ($a_n, b_n \in \mathbb{R}$).

Beweis. Setze

$$s_n = \sum_{k=q}^n a_k, \quad s'_n = \sum_{k=q}^n b_k.$$

Man hat $s_n \leq s'_n$ und $s_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Daher gilt $s'_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. $\square$

Satz 3.2.5 (Monotoniekriterium). Sei $\sum_{n \geq q} a_n$ mit $a_n \geq 0 \forall n \geq q$. Dann ist $\sum_{n \geq q} a_n$ konvergent $\iff (s_n)_{n \geq q}$ beschränkt ist.

Beweis. Beachte $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0 \implies (s_n)_{n \geq q}$ monoton wachsend. Eine Anwendung des Monotonieprinzips auf (s_n) zeigt:

$$(s_n)_{n \geq q} \text{ beschränkt} \iff (s_n)_{n \geq q} \text{ konvergiert.}$$

Die letzte Aussage bedeutet $\sum_{n \geq q} a_n$ ist konvergent. $\square$

Beispiel.

(i) Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ mit $0 \leq |a_n| \leq 1 \ \forall n$. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Dann ist $\sum_{n \geq 0} z^n$ Majorante von $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ da $|a_n z^n| = |a_n| |z|^n \leq |z|^n$. Deshalb ist $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ konvergent.

(ii) Sei $s \in \mathbb{Q}$, $s > 1$ und $a_n := \frac{1}{n^s} > 0 \ \forall n \geq 1$. Man kann zeigen, dass

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{s-1}} \quad \forall n \geq 1.$$

Nach Monotoniekriterium ist $\sum_{n \geq 1} a_n$ konvergent.

Hinweis. Wähle k mit $n < 2^k - 1$. Dann

$$\begin{aligned} s_n &\leq s_{2^k-1} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \dots + \frac{1}{7^s}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{k-1})^s} + \dots + \frac{1}{(2^k-1)^s}\right) \\ &\leq 1 + \frac{2}{2^s} + \frac{2^2}{2^{2s}} + \dots + \frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)s}} \\ &= \sum_{j=0}^k \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^j \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^k}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}} \\ &< \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{s-1}} \end{aligned}$$

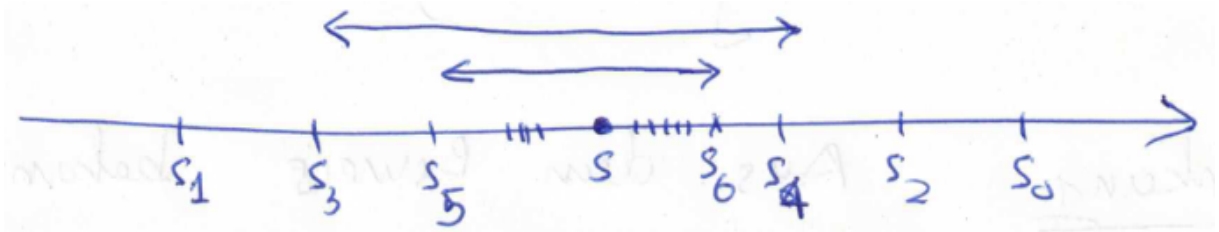
(iii) Sei $s \in \mathbb{Q}$, $s \leq 1$. Dann gilt $\frac{1}{n^s} \geq \frac{1}{n} \ \forall n \geq 1$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, nach Minorantenprinzip, erhält man $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \infty$. Die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ heißt harmonische Reihe.

Satz 3.2.6. Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ konvergent. (Leibniz-Kriterium)

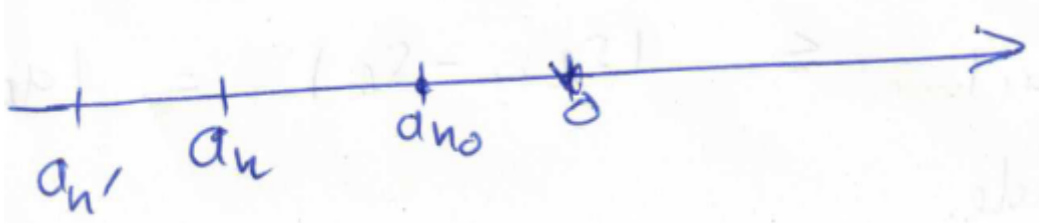
Beweis. Sei $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$. Beachte

$$\begin{aligned} s_k - s_{k-2} &= (-1)^k (a_k - a_{k-1}) \\ \text{z.B. } s_2 - s_0 &= (a_0 - a_1 + a_2) - a_0 = a_2 - a_1 = (-1)^2 (a_2 - a_1) \end{aligned}$$

Folglich $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots$ und $\dots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$ (weil $a_k \leq a_{k-1} \ \forall k$).



Da $\lim a_n = 0$ und $a_n \geq a_{n+1}$, hat man $a_n \geq 0$ (sonst $\exists a_{n_0} < 0$, dann $a_n \leq a_{n_0} < 0 \Rightarrow a_n$ kann gegen 0 nicht konvergieren).



Daraus folgt, für gerade Indizes k , gilt

$$s_k - s_{k-1} = (-1)^k a_k = a_k \geq 0.$$

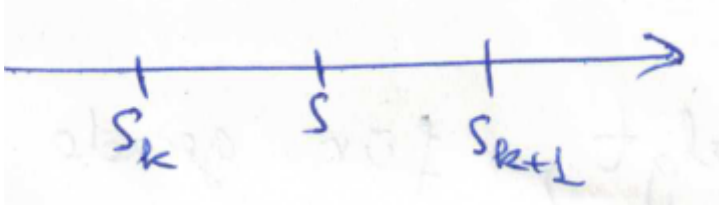
Betrachte $[s_{k-1}, s_k]$ für $k = 2, 4, 6, \dots$. Sie bilden eine Familie der Intervallen, welche eine Intervallschachtelung ist, da die Länge von $[s_{k-1}, s_k]$ gleich $|a_k| \rightarrow 0$ ist. Daher $\exists!$ (es gibt eindeutige Zahl) $s \in \mathbb{R}$ mit $s_k \rightarrow s$ (siehe Bemerkung 2.1.6). $\square$

Bemerkung. Aus dem Beweis bekommt man die folgende Restabschätzung:

Sei $s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$. Da s zwischen s_k und s_{k+1} liegt (k ungerade), gilt

$$\begin{aligned} |s - s_k| &\leq |s_{k+1} - s_k| = |a_{k+1}| = a_{k+1} \\ |s - s_{k+1}| &\leq |s_{k+1} - s_k| = |a_{k+1}| = a_{k+1} \end{aligned}$$

$\forall k$ ungerade.



Eine Reihe der Form $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ oder $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} a_n$ mit $a_n > 0 \forall n$ heißt alternierend. Die Glieder haben ein abwechselndes Vorzeichen.

Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ heißt harmonisch.

Die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ heißt alternierend harmonisch. Sie ist konvergent wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ und Satz 3.2.6. Wir sehen später, dass $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$.

3.3 Absolute Konvergenz

Definition 3.3.1. $\sum_{n \geq q} a_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{n \geq q} |a_n|$ konvergent ist.

Bemerkung.

- (i) Ist $\sum_{n \geq q} |a_n|$ konvergent, so konvergiert auch $\sum_{n \geq q} a_n$ (Majorantenkriterium Satz 3.2.3) und

$$\left| \sum_{n=q}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=q}^{\infty} |a_n|.$$

- (ii) Aus der Konvergenz von $\sum_{n \geq q} a_n$ folgt nicht die Konvergenz von $\sum_{n \geq q} |a_n|$. Z.B. $\sum_{n \geq q} \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent (Leibniz-Kriterium), aber $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$ ist nicht konvergent.

Satz 3.3.2 (Wurzelkriterium). Sei $\sum_{n \geq q} a_n$ eine Reihe.

- (i) Ist $l = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so konvergiert $\sum_{n \geq q} a_n$ absolut.
- (ii) Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n , so ist $\sum_{n \geq q} a_n$ divergent. Insbesondere wenn $l = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so divergiert $\sum_{n \geq q} a_n$.

Beweis. Zu (i): Sei $0 < q < 1$ mit $0 \leq l < q < 1$. Aus Bolzano-Weierstraß (Satz 2.3.3) gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \forall n \geq n_0$. (Erinnere: l ist der größte Häufungswert von $\sqrt[n]{|a_n|}$.) Folglich gilt $|a_n| \leq q^n$ und $\sum_{n \geq n_0} q^n$ ist eine Majorante von $\sum_{n \geq n_0} |a_n|$. Da $\sum_{n \geq n_0} q^n$ konvergent ist, nach Satz 3.2.3 (Majorantenkriterium), ist $\sum_{n \geq n_0} |a_n|$ auch konvergent. Es folgt: $\sum_{n \geq q} |a_n|$ ist konvergent (Folgerung 3.2.2 (2)).

Zu (ii): Da $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n , gilt $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele n . Daher ist (a_n) keine Nullfolge. Laut Folgerung 3.2.2 (2) ist $\sum_{n \geq q} a_n$ nicht konvergent.

Schließlich wenn $l > 1$, nach Bolzano-Weierstraß, bekommt man: $\forall \varepsilon > 0: \sqrt[n]{|a_n|} > l - \varepsilon$ für unendlich viele n . Wähle $\varepsilon = \frac{l-1}{2}$ sieht man

$$\sqrt[n]{|a_n|} > l - \frac{l-1}{2} = \frac{l+1}{2} > 1$$

für unendlich viele n .

□

Satz 3.3.3 (Quotientenkriterium). Sei $\sum_{n \geq q} a_n$ eine Reihe, so dass $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0 \forall n \geq N$. Dann:

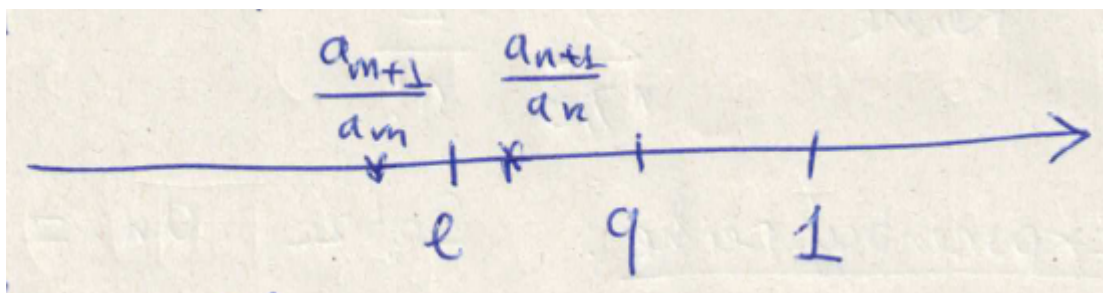
- (i) Ist

$$l = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

so ist $\sum_{n \geq q} a_n$ absolut konvergent.

- (ii) Gibt es $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_1 \geq N$, mit $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \forall n \geq N_1$, so ist $\sum_{n \geq q} a_n$ divergent.

Beweis. Zu (i): Sei $0 < q < 1$ mit $0 \leq l < q < 1$. Bolzano-Weierstraß besagt: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \forall n \geq n_0$.



Deshalb gilt

$$a_{n+1} \leq q \cdot a_n \leq q \cdot (q \cdot a_{n-1}) \leq \dots \leq q^{n-n_0} \cdot a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0.$$

Also ist $\sum_{n \geq n_0} \frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \cdot q^n$ Majorante für $\sum_{n \geq n_0} a_n$. Folglich ist $\sum_{n \geq n_0} a_n$ (daher auch $\sum_{n \geq q} a_n$) konvergent (da $0 < q < 1$).

Zu (ii): Man hat $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \forall n \geq N_1$. Es folgt

$$|a_{n+1}| \geq |a_n| \geq \dots \geq |a_{N_1}| > 0.$$

$\Rightarrow (a_n)_{n \geq q}$ ist keine Nullfolge.

$\Rightarrow \sum_{n \geq q} a_n$ ist divergent (Folgerung (1)).

□

Zusatz

In der Literatur bezeichnet man die Reihe $\sum_{n \geq q} a_n$ auch mit $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$. In diesem Fall versteht man, dass das Symbol $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$ zweierlei bedeutet

(i) die Reihe $\sum_{n \geq q} a_n$ selbst,

(ii) im Fall der Konvergenz den Grenzwert $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=q}^m a_n$.

In dieser Vorlesung schreiben wir immer $\sum_{n \geq q} a_n$ für Reihen, und wenn die Reihe konvergent ist, bezeichnen wir $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$ den Grenzwert von $(\sum_{n=q}^m a_n)_{m \geq q}$.

Woche 9

Beispiel 3.3.4. (i) Die Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ heißt Exponentialreihe. Setze $a_n := \frac{z^n}{n!}$ für $n \geq 0$. Für $z \neq 0$ ist $a_n \neq 0$ und $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{z}{n+1} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Daher konvergiert die Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$. Diese konvergiert offensichtlich auch für $z = 0$. Man setzt

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{C}$$

Die Funktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \exp(z)$ heißt Exponentialfunktion. Es gilt $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}$.

(ii) Betrachte $\sum_{n \geq 1} n z^n$, $z \in \mathbb{C}$; $a_n = n z^n$, $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n|z^n|} = \sqrt[n]{n}|z| \rightarrow |z|$ für $n \rightarrow \infty$ (Satz 2.1.3 (iii)). Daher gilt

$$l = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = |z| < 1 \text{ wenn } |z| < 1.$$

In diesem Fall, nach Wurzelkriterium, ist die Reihe absolut konvergent.

Andererseits wenn $|z| \geq 1$, gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n}|z| \geq |z| \geq 1 \quad \forall n \geq 1,$$

daher ist die Reihe divergent.

(iii) Es gibt divergente Reihen $\sum_{n \geq q} a_n$ mit $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ oder $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, z.B. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

Satz 3.3.5 (Cauchy-Produkt). Seien $\sum_{n \geq 0} a_n$ und $\sum_{n \geq 0} b_n$ absolut konvergente Reihen. Setze

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Dann ist $\sum_{n \geq 0} c_n$ absolut konvergent, und

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

Bemerkung. Es gibt auch eine Fassung von Satz 3.3.5 für $\sum_{n \geq q} a_n$, $\sum_{n \geq q} b_n$. Eigentlich aus einer Reihe $\sum_{n \geq q} a_n$ kann man, durch $a_n := 0$ für $0 \leq n < q$, eine Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n$ mit gleichem Konvergenzverhalten und gleicher Summe (im Fall von Konvergenz).

Beweis von Satz 3.3.5. Sei

$$I_n = \{(j, l) \mid 0 \leq j \leq n, 0 \leq l \leq n\}, \quad I_{n,k} := \{(j, l) \in I_n \mid j + l = k\}.$$

Betrachte

$$I_{n,k} \cap I_{n,k'} = \emptyset \quad \forall k \neq k', \quad I_n = \bigcup_{k=0}^{2n} I_{n,k}$$

Daher bekommt man eine Zerlegung von I_n auf disjunkte Teilmengen $I_{n,k}$. c_k (für $0 \leq k \leq n$) lässt sich so schreiben:

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 = \sum_{(j,l) \in I_{n,k}} a_j b_l$$

Betrachte

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{(j,l) \in I_n} a_j b_l \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{(j,l) \in I_{n,k}} a_j b_l \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{(j,l) \in I_{n,k}} a_j b_l \right) + \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\sum_{(j,l) \in I_{n,k}} a_j b_l \right) \\ &= \sum_{k=0}^n c_k + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} \left(\sum_{(j,l) \in I_{n,k}} a_j b_l \right)}_{=: g_n} \end{aligned}$$

Wir schätzen g_n ab. Man hat

$$|g_n| \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\sum_{(j,l) \in I_{n,k}} |a_j| |b_l| \right) \leq \left(\sum_{(j,l) \in I'_n} |a_j| |b_l| \right)$$

wobei $I'_n := \{(j, l) \in I_n \mid j \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \text{ oder } l \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ (da wenn $(j, l) \in I_{n,k}$ mit $k \geq n+1$, gilt $j+l=k \geq n+1 \implies j \geq \frac{n}{2} \text{ oder } l \geq \frac{n}{2}$).

Es folgt

$$|g_n| \leq \left(\sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n |a_j| \right) \left(\sum_{l=0}^n |b_l| \right) + \left(\sum_{j=0}^n |a_j| \right) \left(\sum_{l=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n |b_l| \right).$$

Nach Voraussetzung

$$\sum_{l=0}^n |b_l| \rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} |b_l| < \infty, \quad \sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{\infty} |a_j| \rightarrow 0 \quad (\text{Cauchy-Kriterium 3.2.1}).$$

Folglich erhält man

$$\left(\sum_{j=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n |a_j| \right) \left(\sum_{l=0}^n |b_l| \right) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Ähnlicherweise gilt auch

$$\left(\sum_{j=0}^n |a_j| \right) \left(\sum_{l=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n |b_l| \right) \rightarrow 0.$$

Damit gilt $g_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dementsprechend

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) = \sum_{k=0}^n c_k + \underbrace{g_n}_{\rightarrow 0}.$$

Daher erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Ersetzen a_k durch $|a_k|$ und b_k durch $|b_k|$, bekommen wir auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right),$$

wobei

$$\tilde{c}_k = \sum_{j=0}^k |a_j| |b_{k-j}| \geq |c_k|$$

(d.h. $\sum_{k \geq 0} \tilde{c}_k$ ist eine Majorante von $\sum_{k \geq 0} c_k$). Es folgt $\sum_{k \geq 0} c_k$ konvergiert absolut. $\square$

Beispiel 3.3.6. Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Betrachte die Exponentialreihen $\sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}$ und $\sum_{k \geq 0} \frac{w^k}{k!}$ ($a_k = \frac{z^k}{k!}$, $b_k = \frac{w^k}{k!}$) und

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \\ &= \frac{(z+w)^n}{n!} \quad (\text{Binomialformel}) \end{aligned}$$

Erinnere $\sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert absolut $\forall z \in \mathbb{C}$, weil $\sum_{k \geq 0} \left| \frac{z^k}{k!} \right| = \sum_{k \geq 0} \frac{|z|^k}{k!}$ konvergent ist. Aus Satz 3.3.5 gilt

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n}_{=\exp(z+w)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

Daher: $\exp(z+w) = \exp(z) \exp(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$.

Satz 3.3.7. Sei $a > 0$. Dann gibt es genau eine Funktion $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(1) = a$ und $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$, nämlich $\varphi(r) = a^r$ für $r \in \mathbb{Q}$.

Insbesondere da $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$ und $\exp(1) = e$, gilt $\exp(r) = e^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}$. Das veranlässt

Definition 3.3.8. Die komplexen Potenzen e^z mit $z \in \mathbb{C}$ sind definiert durch

$$e^z := \exp(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Wir brauchen ein bisschen mehr Zeit, um a^z mit $a > 0$, $z \in \mathbb{C}$ zu definieren.

3.4 Potenzreihen

Definition 3.4.1. Sei $\mathcal{R}$ die Menge der Reihen mit komplexen Gliedern. Eine Potenzreihe ist eine Abbildung

$$P: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{R}, z \mapsto P(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k.$$

Die Zahlen a_n heißen Koeffizienten der Reihe.

Lemma 3.4.2. Sei $z_0 \neq 0$ und $P(z_0) = \sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ konvergent. Dann ist $P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ absolut konvergent für $|z| < |z_0|$ (d.h. $z \in B_{|z_0|}(0)$).

Beweis. Da $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ konvergent, ist $(a_n z_0^n)_{n \geq 0}$ eine Nullfolge $\implies (a_n z_0^n)_{n \geq 0}$ beschränkt $\implies \exists M > 0: |a_n| |z_0|^n \leq M \quad \forall n \geq 0$. Daher gilt

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$$

und $\sum_{n \geq 0} M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ eine Majorante für $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Ist $|z| < |z_0|$, so ist $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$. Daher ist die Majorante konvergent und ist $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ absolut konvergent. $\square$

Satz 3.4.3. Sei $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe. Sei

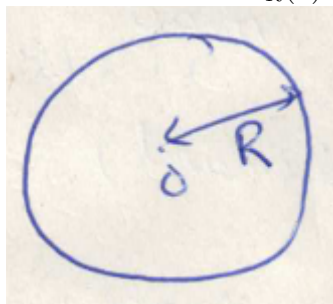
$$R := \sup \{t \in [0, \infty) \mid (|a_n| t^n)_{n \geq 0} \text{ beschränkt} \} \in [0, \infty].$$

Dann gilt

(i) $\forall z \in B_R(0)$ ist die Reihe absolut konvergent.

(ii) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0)$ ist die Reihe divergent, wobei $\overline{B}_R(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$.

Wir verabreden, dass $B_R(0) := \mathbb{C}$, falls $R = \infty$.



Beweis. Erinnerung: $\forall A \subset \mathbb{R}$ wenn A beschränkt ist, so ist $\sup A \in \mathbb{R}$. Wenn A unbeschränkt ist, so ist $\sup A = \infty$.

Zu (i): Sei $z \in B_R(0)$ und $r \in (|z|, R)$. Da $(|a_n| r^n)_{n \geq 0}$ beschränkt ist, nach dem Beweis von Lemma 3.4.2, sieht man, dass $P(z)$ absolut konvergiert.

Zu (ii): Sei $|z| > R$. Wähle $r \in \mathbb{R}$ mit $R < r < |z|$. Wäre $P(z)$ konvergent, so wäre $P(r)$ konvergent. Das widerspricht der Definition von R .

□

Definition 3.4.4. Die Zahl R im Satz 3.4.3 heißt Konvergenzradius (von P) und $B_R(0)$ heißt Konvergenzkreis(scheibe) der Potenzreihe.

Satz 3.4.5. Sei R der Konvergenzradius von $P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Dann gilt:

(i) $R = \frac{1}{L}$ wobei $L := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$ (Cauchy-Hadamard)

(ii) $R = \frac{1}{q}$ wobei $q := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in [0, \infty]$, falls $\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)_{n \geq N}$ einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ hat ($N \in \mathbb{N}$).

Dabei wird in diesem Zusammenhang vereinbart: $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$.

Beweis. **Zu (i):** Fall 1: $L \in (0, \infty)$. Dann

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z| = L \cdot |z|.$$

Nach Wurzelkriterium ist $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ absolut konvergent, wenn $L \cdot |z| < 1 \iff |z| < \frac{1}{L}$.
 $\sum a_n z^n$ divergiert, wenn $L \cdot |z| > 1$ ($\iff |z| > \frac{1}{L}$). Das bedeutet $R = \frac{1}{L}$.

Fall 2: $L = \infty$. Dann $\limsup \sqrt[n]{|a_n||z|^n} = \infty$ wenn $z \neq 0$ ist die Reihe $P(z)$ divergent für $z \neq 0$.

Wenn $z = 0$, ist $P(z)$ offensichtlich konvergent. Daher $R = \frac{1}{L} = 0$.

Fall 3: $L = 0$. Dann $\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Folglich ist $P(z)$ konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$ und $R = \infty = \frac{1}{L}$.

Zu (ii): Fall 1: $q \in (0, \infty)$. Dann (für $z \neq 0$)

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |z| \rightarrow q \cdot |z|.$$

Quotientenkriterium $\implies$ die Reihe $P(z)$ ist konvergent für $|z| < \frac{1}{q}$ und divergent für $|z| > \frac{1}{q}$. Daher $R = \frac{1}{q}$.

Fall 2: $q = \infty$. Dann

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| \rightarrow \infty \text{ wenn } z \neq 0.$$

Es folgt: Die Reihe $P(z)$ ist divergent für $z \neq 0 \implies R = 0$.

Fall 3: $q = 0$. Ähnlicherweise.

□

Beispiel.

(i) Die geometrische Reihe $\sum_{k \geq 0} z^k$ hat $a_k = 1 \quad \forall k \geq 0$. Dann $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \rightarrow 1$ für $k \rightarrow \infty$. Man bekommt $R = 1$.

(ii) Betrachte die Exponentialreihe $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \implies R = \infty$$

(iii) Definieren wir: $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\cos z := \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z := \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

Da $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$, gilt

$$\cos z = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Wegen (i) hat die Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ den Konvergenzradius $R = \infty$.

Ähnlicherweise gilt

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

und die Reihe hat auch Konvergenzradius ∞ . Die Funktion $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Cosinus-Funktion. Die Funktion $\sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Sinus-Funktion.

Beachte $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\cos z + i \sin z = e^{iz} \text{ (Eulersche Formel)}, \quad \cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z,$$

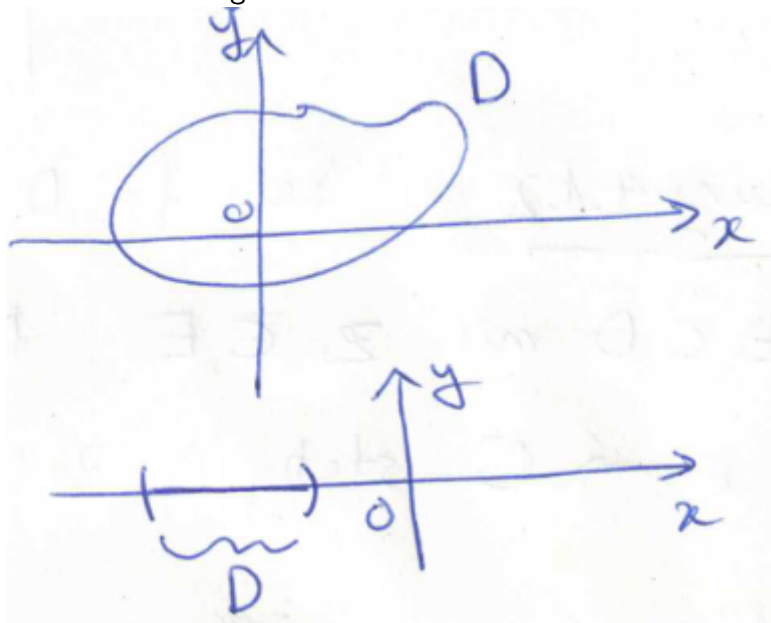
und $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\cos x \in \mathbb{R}$, $\sin x \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}$). Daher ist $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ die Zerlegung von e^{ix} auf Realteil und Imaginärteil.

Die $\cos, \sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stimmen mit der Cosinus- und Sinus-Funktion in der Schule überein. Um das zu sehen, müssen wir bis zum Ende des Kapitels 5 warten.

4 Stetigkeit und Grenzwerte

4.1 Stetige Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine Menge.



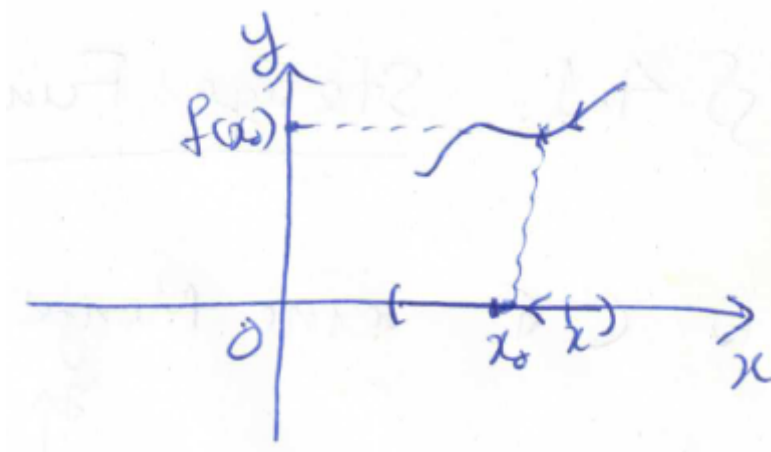
Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt reell, falls $f(x) \in \mathbb{R} \forall x \in D$.

Definition 4.1.1 (ε - δ -Definition der Stetigkeit). Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Die Funktion f heißt stetig im Punkt z_0 , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0 \forall z \in D, |z - z_0| < \delta: |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Die Funktion heißt stetig (auf D), falls f stetig in allen $z_0 \in D$ ist.

In der Umgangssprache ist f stetig in z_0 , wenn gilt: $f(x)$ ist beliebig nahe von $f(x_0)$, wenn x hinreichend nahe an x_0 ist.



Bemerkung 4.1.2. Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in z_0 . Sei $E \subset D$ mit $z_0 \in E$. Dann ist auch $f|_E: E \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in z_0 .

Beispiel.

- (i) Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine konstante Abbildung, d.h. $f(z) = c \forall z \in D$. Dann ist f stetig.
- (ii) Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z$. Dann ist f stetig.
- (iii) Allgemeiner, betrachten wir eine Lipschitz-stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, d.h. $\exists L > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \forall x, y \in D$. Dann ist f auch stetig auf D .

Beweis. Sei $x_0 \in D$. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$. Beachte

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0| \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

für $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Daher ist f stetig in z_0 . □

(iv) Sei

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

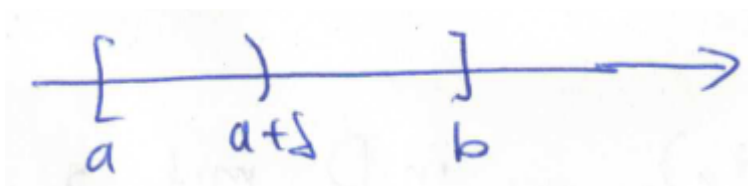
Dann ist f unstetig in allen $x_0 \in \mathbb{R}$ (unstetig = nicht stetig), weil $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.

Definition 4.1.3. Sei $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$. Eine Teilmenge $U \subset D$ heißt Umgebung von z_0 in D , wenn $\exists \delta > 0$ mit $B_\delta(z_0) \cap D \subset U$.

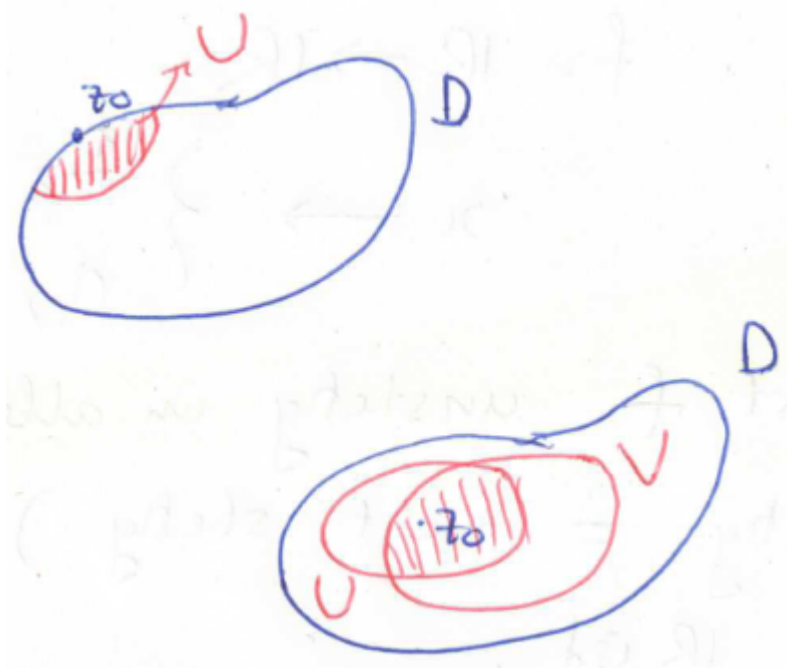
Erinnere: $B_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\}$.

Beispiel.

- (i) $D = \mathbb{R}$, $B_\delta(z_0) \cap D = (z_0 - \delta, z_0 + \delta)$ ist eine Umgebung von $z_0 \in D = \mathbb{R}$.
- (ii) $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $B_\delta(0) \cap D = [a, a + \delta) \cap [a, b]$



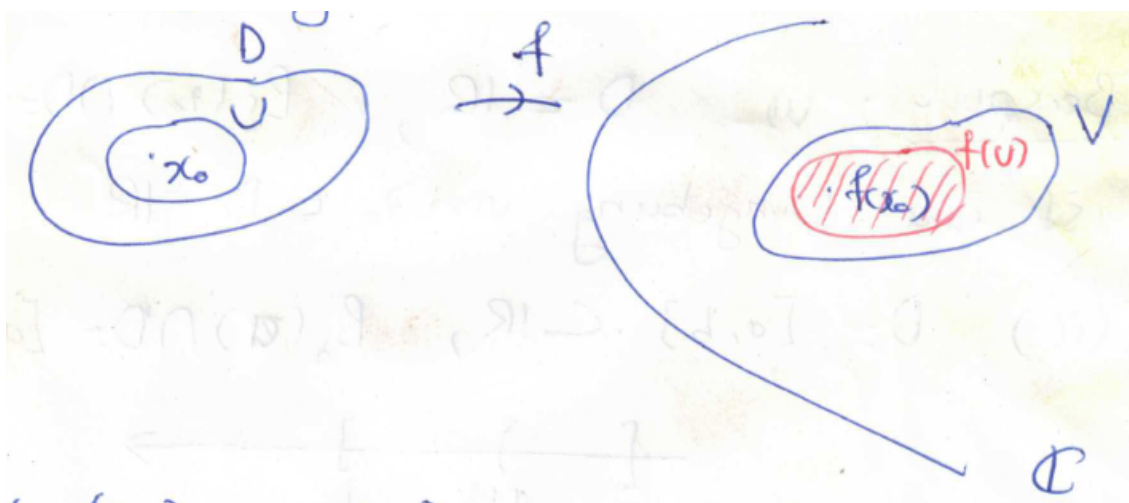
- (iii) Ist $U \subset D$ eine Umgebung von z_0 und $U \subset V \subset D$, so ist V eine Umgebung von z_0 in D . Sind U, V Umgebungen von z_0 in D , so ist $U \cap V$ eine Umgebung von z_0 in D .



Satz 4.1.4. Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

Woche
10

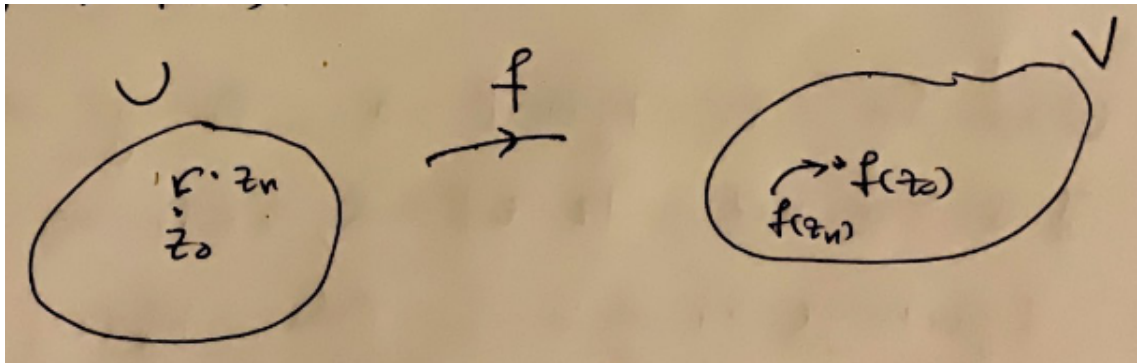
- (i) f ist stetig in z_0 .
- (ii) Zu jeder Umgebung V von $f(z_0)$ in $\mathbb{C}$ gibt es eine Umgebung U von z_0 in D mit $f(U) \subset V$.



- (iii) $\forall (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $z_n \rightarrow z_0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ für $n \rightarrow \infty$. (Folgenkriterium für Stetigkeit)

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei V eine Umgebung von $f(z_0)$ in $\mathbb{C}$. Dann $\exists \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(z_0)) \subset V$. Nach Stetigkeit in z_0 , $\exists \delta > 0$ mit: $\forall z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt $f(z) \in B_\varepsilon(f(z_0)) \subset V$. Daher $f(B_\delta(z_0) \cap D) \subset V$.

- (ii) $\implies$ (iii): Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D ($z_n \in D \forall n$) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$. Sei V eine Umgebung von $f(z_0)$. Nach (ii), $\exists$ Umgebung U von z_0 mit $f(U) \subset V$. Da $z_n \rightarrow z_0$, gilt $z_n \in U$ für n hinreichend groß. Es folgt $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.



(iii) $\implies$ (i): Angenommen, f ist nicht stetig in z_0 . Dann $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists z \in D: |z - z_0| < \delta$ und $|f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon$.

Wähle $\delta = \frac{1}{n}$ und $z_n \in D$ mit $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(z_n) - f(z_0)| \geq \varepsilon$. Daher $z_n \rightarrow z_0$ und $f(z_n) \not\rightarrow f(z_0)$ (konvergiert nicht gegen $f(z_0)$). $\square$

Satz 4.1.5. Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in $z_0 \in D$. Dann gilt:

(i) $f + g: D \rightarrow \mathbb{C}$ und $fg: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in z_0 .

(ii) $\lambda f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

(iii) Falls $g(z_0) \neq 0$, so ist $E = \{z \in D \mid g(z) \neq 0\}$ eine Umgebung von z_0 in D , und $\frac{f}{g}: E \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in z_0 .

Beweis. Zu (i): Sei $(z_n)_n$ in D , $z_n \rightarrow z_0$. Dann gilt $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$, $g(z_n) \rightarrow g(z_0)$. $\implies f(z_n) + g(z_n) \rightarrow f(z_0) + g(z_0)$.

Zu (ii): Sei $\varepsilon := |g(z_0)| > 0$. Da g stetig in z_0 ist, $\exists \delta > 0$ mit $|z - z_0| < \delta$, $z \in D \implies |g(z) - g(z_0)| < \varepsilon$. Also $|g(z)| > 0$ für dieses z . Daher $B_\delta(z_0) \cap D \subset E \implies E$ ist eine Umgebung von z_0 in D . Die Stetigkeit von $\frac{f}{g}$ in z_0 ist klar (Satz 4.1.4 (iii)). $\square$

Folgerung 4.1.6. Sei $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Sei $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$. P heißt Polynom.

(i) Polynome sind stetig.

(ii) Rationale Funktionen $\frac{P}{Q}: D \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$, wobei $D := \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) \neq 0\}$, P, Q sind Polynome, sind stetig.

Beweis. Direkt aus Sätzen 4.1.5 und 4.1.4. $\square$

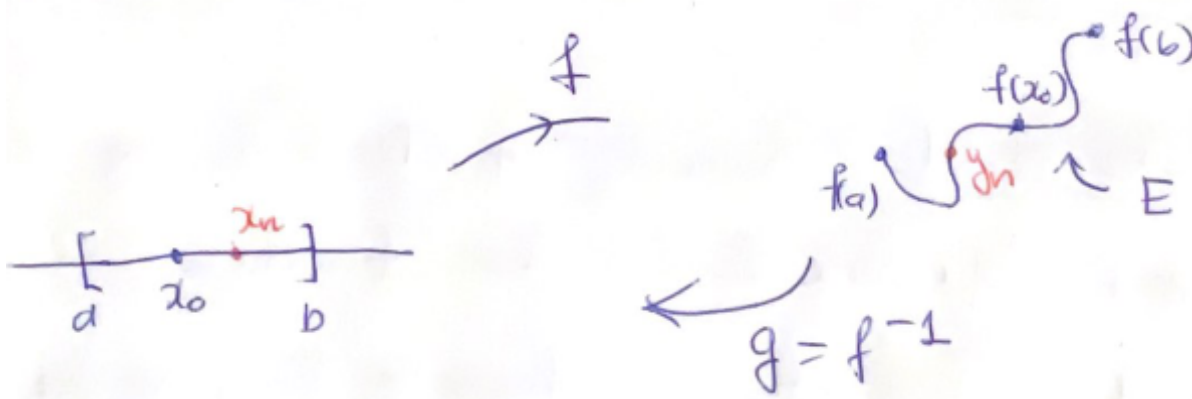
Satz 4.1.7. Seien $f: D \rightarrow \mathbb{C}, g: E \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(D) \subset E$. Ist f stetig in $z_0 \in D$ und g stetig in $f(z_0)$ in E , so ist $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in z_0 .

Beweis. Es genügt, das Folgenkriterium für Stetigkeit zu benutzen. $\square$

Folgerung 4.1.8. Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind $|f|, \bar{f}, \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Beweis. Sei $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto |z|$. Beachte g stetig (g ist Lipschitz-stetig) und $g \circ f(z) = |f(z)|$. Nach Satz 4.1.7 ist $|f|$ stetig. Analog für $\bar{f}, \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$. $\square$

Satz 4.1.9 (Stetigkeit der Umkehrfunktion). Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und injektiv. Sei $E := \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, und sei $g: E \rightarrow [a, b]$ die Umkehrfunktion von f , $g = f^{-1}$. Dann ist g stetig.



Beweis. Erinnerung $x = g(y) \iff y = f(x) \forall x \in [a, b], y \in E$.

Sei $y_0 \in E$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in E , $y_n \rightarrow y_0$. Sei $x_n = g(y_n) \in [a, b] \implies f(x_n) = y_n$. Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, (Bolzano-Weierstraß) bekommt man $L = \limsup x_n \in [a, b]$ und eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ mit $x_{n_k} \rightarrow L$ für $k \rightarrow \infty$. Es folgt

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(L) \quad (\text{Stetigkeit von } f)$$

$\parallel$

$$y_{n_k} \rightarrow y_0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

Daher $f(L) = y_0$. Andererseits gilt $f(x_0) = y_0$. Damit $L = x_0$ wegen der Injektivität von f .
 $\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(y_0)$.

Analog gilt auch $\liminf_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(y_0)$. Deshalb, nach Folgerung 2.3.4, erhält man $g(y_n) \rightarrow g(y_0)$ für $n \rightarrow \infty$, d.h. g ist stetig in y_0 . $\square$

Definition 4.1.10. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. f heißt monoton steigend (wachsend), wenn

$$\forall x, y \in I, x \leq y: f(x) \leq f(y).$$

f heißt streng monoton steigend, falls

$$\forall x, y \in I, x < y: f(x) < f(y).$$

Analog für monoton fallend und streng monoton fallend.

f monoton fallend: $\forall x \leq y: f(x) \geq f(y)$.

f streng monoton fallend: $\forall x < y: f(x) > f(y)$.

Bemerkung. Ist f streng monoton, so ist f injektiv.

Beispiel. Sei $k \in \mathbb{N}$. Sei $0 \leq a < b$. Sei

$$f: [\sqrt[k]{a}, \sqrt[k]{b}] \rightarrow [a, b], x \mapsto x^k$$

stetig monoton steigend. Wegen des Satzes 4.1.9 ist

$$g: [a, b] \rightarrow [\sqrt[k]{a}, \sqrt[k]{b}], y \mapsto \sqrt[k]{y}$$

stetig ($g = f^{-1}$). Es folgt $h(x) = \sqrt[k]{x}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

4.2 Potenzreihen und Stetigkeit

Definition 4.2.1. Eine Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert punktweise, wenn $\forall z \in D$ die Folge $(f_n(z))_n$ konvergiert. Ist dies der Fall, so heißt die durch $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ definierte Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ die Grenzfunktion zu (f_n) .

Eine Reihe $\sum_{n \geq 0} f_n$ von Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt punktweise konvergent, falls die Folge der Partialsummen (s_n) , wobei $s_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n$, punktweise konvergiert. In diesem Fall bezeichnen wir die Funktion $z \in D \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Beispiel. Seien $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. Es gilt $f_n(1) = 1 \forall n$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 1$. Für $x \in [0, 1)$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Also konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0, \quad x \in [0, 1) \\ 1 &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Beachte: f ist unstetig, obwohl f_n stetig sind.

Wir führen nun einen neuen Begriff von Konvergenz ein, der garantiert, dass die Grenzfunktion stetig ist.

Definition 4.2.2. Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$. Die Supremumsnorm von f wird definiert durch

$$\|f\|_D := \sup \{|f(z)| \mid z \in D\} \in [0, \infty].$$

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt beschränkt, wenn $\|f\|_D < \infty$. (quivalent dazu: Die Bildmenge $f(D) \subset \mathbb{C}$ ist beschränkt.) Andernfalls heißt f unbeschränkt.

Beachte:

$$B(0) := \{f: D \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_D < \infty\}$$

ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum, und

- 1) $\|f\|_D \geq 0$; $\|f\|_D = 0 \iff f \equiv 0$,
- 2) $\|\lambda f\|_D = |\lambda| \|f\|_D \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$,
- 3) $\|f + g\|_D \leq \|f\|_D + \|g\|_D \quad \forall f, g \in B(0)$.

Definition 4.2.3. Eine Reihe $\sum_{n \geq 0} f_n$ von Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt normal konvergent, falls $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_D$ konvergiert.

Satz 4.2.4. Ist $\sum_{n \geq 0} f_n$ normal konvergent, so ist $\sum_{n \geq 0} f_n$ punktweise konvergent.

Beweis. Sei $z \in D$. Beachte $|f_n(z)| \leq \|f_n\|_D$. Daher ist die konvergente Reihe $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_D$ eine Majorante für $\sum_{n \geq 0} f_n(z)$. $\square$

Satz 4.2.5. Sei $P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Sei $0 < r < R$. Dann konvergiert $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ normal auf $B_r(0)$.

Beweis. $D := B_r(0)$. Man hat

$$|f_k(z)| = |a_k z^k| \leq |a_k| r^k, \quad z \in D.$$

Es folgt $\|f_k\|_D \leq |a_k| r^k$. Daher ist $\sum_{k \geq 0} |a_k| r^k$ eine Majorante für $\sum_{k \geq 0} \|f_k\|_D$. Da $0 < r < R$, ist $\sum_{k \geq 0} |a_k| r^k$ konvergent (Satz 3.4.3). $\implies \sum_{k \geq 0} \|f_k\|_D$ konvergent. $\square$

Bemerkung. Die Bedingung $r < R$ ist wichtig, z.B. wenn $a_n = 1 \forall n$, $R = 1$, $\|f_k\|_{B_1(0)} = 1 \forall k$, und

$$\sum_{k \geq 0} \|f_k\|_{B_1(0)} = 1 + 1 + \dots = \infty.$$

Satz 4.2.6. Konvergiert $\sum_{n \geq 0} f_n$ normal gegen $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, und sind alle $f_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, so ist auch f stetig.

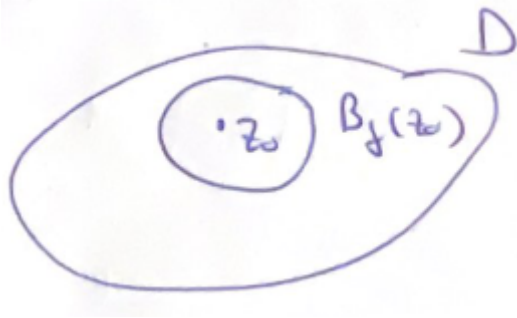
Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, $z_0 \in D$. Wähle N mit

$$\sum_{n=N+1}^N \|f_k\|_D < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\text{Cauchy-Kriterium}). \quad (8)$$

Da f_n stetig sind, $\exists \delta > 0$ mit

$$\left| \sum_{n=0}^N f_n(z) - \sum_{n=0}^N f_n(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (9)$$

für $z \in B_\delta(z_0) \cap D$. Für $z \in B_\delta(z_0) \cap D$ gilt dann



$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq \left| f(z) - \sum_{n=0}^N f_n(z) \right| + \left| \sum_{n=0}^N f_n(z) - \sum_{n=0}^N f_n(z_0) \right| + \left| \sum_{n=0}^N f_n(z) - f(z) \right| \\ &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z) \right| + \left| \sum_{n=0}^N f_n(z) - \sum_{n=0}^N f_n(z_0) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

(wegen (8), (9) und der Ungleichung $|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_D$) $\square$

Folgerung 4.2.7 (). Sei $P(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist

$$P: B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

stetig. (Wir nutzen P , um die Summe der Potenzreihen zu bezeichnen.)

Beweis. Sei $f_n(z) := a_n z^n$, $z \in B_r(0)$, wobei $0 < r < R$ beliebig. Nach Satz 4.2.5 konvergiert $\sum_{n \geq 0} f_n$ normal auf $B_r(0)$. Daher ist $P = \sum_{n=0}^{\infty} f_n: B_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, wegen des Satzes 4.2.6. Da r beliebig $\in (0, R)$ ist, ist P stetig auf $B_R(0)$. $\square$

Folgerung 4.2.8. Die Funktionen $\exp, \cos, \sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind stetig. Insbesondere sind ihre Einschränkungen $\exp, \cos, \sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

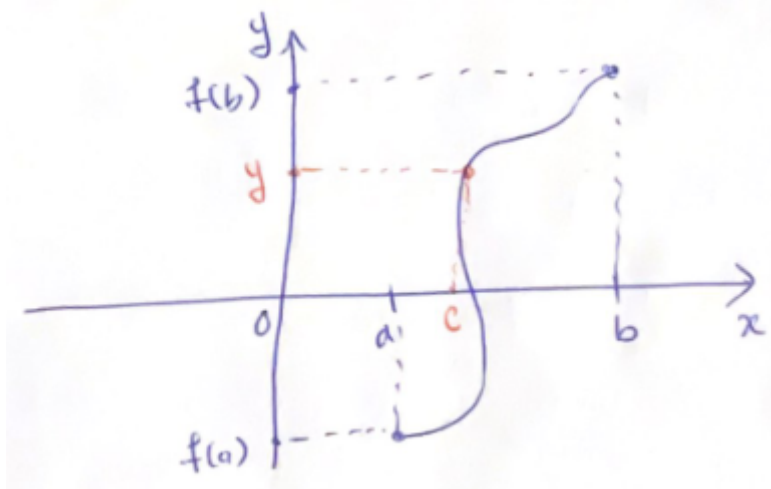
Beweis. $\exp, \cos, \sin$ sind die Summen einer Potenzreihe, deren Konvergenzradius gleich ∞ ist. $\square$

4.3 Der Zwischenwertsatz

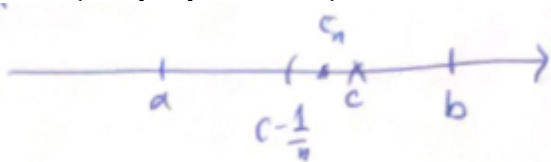
Satz 4.3.1 (Zwischenwertsatz). Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann $\forall y \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$, gibt es $c \in [a, b]$ mit $f(c) = y$.

Dabei bedeutet „ y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ “:

- Falls $f(a) \leq f(b)$, so ist $f(a) \leq y \leq f(b)$.
- Falls $f(a) \geq f(b)$, so ist $f(a) \geq y \geq f(b)$.



Beweis. O.B.d.A. $f(a) \leq y \leq f(b)$. Setze $M := \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y\}$. Da $a \in M$, ist $M \neq \emptyset$. Zusätzlich ist M nach oben beschränkt. Dann ist $c := \sup M \in [0, \infty)$. Wir zeigen $f(c) = y$ ($c \in [0, b]$ eigentlich).

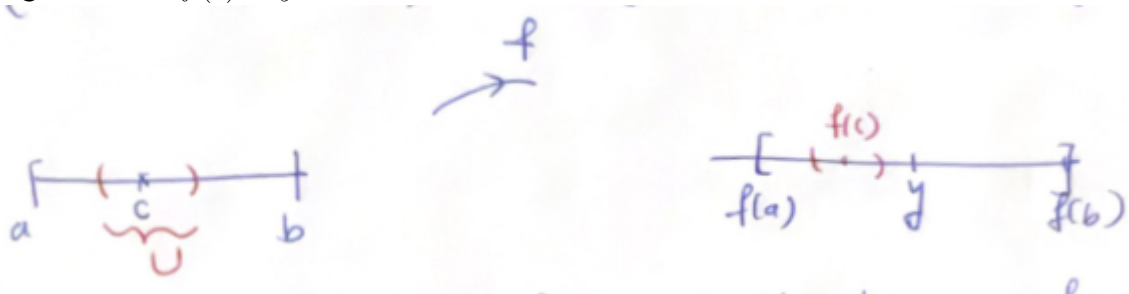


Nach Definition des Supremums,

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists c_n \in \left(c - \frac{1}{n}, c\right] \cap M.$$

Also $f(c_n) \leq y$. Stetigkeit von $f \implies f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) \leq y$ (da $c_n \rightarrow c$).

Angenommen, $f(c) < y$.



Dann ist $(-\infty, y)$ eine Umgebung von $f(c)$. Es folgt $\exists$ Umgebung U von c in $[a, b]$ mit $f(U) \subset (-\infty, y)$.

Sei $\delta > 0$ mit $(c - \delta, c + \delta) \cap [a, b] \subset U$. Beachte $c \neq b$ (sonst $f(c) = f(b) \geq y$). Daher $\exists d > c$, $d \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$ und $f(d) \in f(U) \subset (-\infty, y)$. Anders gesagt gilt $f(d) < y$ und $d > c$. Widerspruch! Daher $f(y) = c$. $\square$

Satz 4.3.2. Sei $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

(i) $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.

(ii) Die Umkehrfunktion von $\exp$, bezeichnet mit $\log$, $\log: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.

(iii) $\log 1 = 0$, $\log(x + y) = \log x + \log y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Zu (i): Wir zeigen zuerst $\exp x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

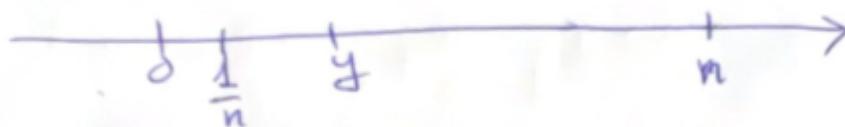
Für $x > 0$ gilt $\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots > 1$.

Für $x = 0$ gilt $\exp(0) = 1 > 0$.

Für $x < 0$ gilt $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$ (beachte $-x > 0$ falls $x < 0$).

Nun nehmen wir $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Dann $\frac{\exp x}{\exp y} = \exp(x - y) > 1$, da $x - y > 0$. Folglich $\exp(x) > \exp(y)$, d.h. $\exp$ ist streng monoton wachsend.

Wir zeigen noch $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$. Sei $y \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Wähle n mit $\frac{1}{n} < y < n$.



Dann ist

$$\exp(n) = 1 + n + \frac{n^2}{2} + \dots > n > y, \quad \exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} < \frac{1}{n} < y.$$

Es folgt $y \in [\exp(-n), \exp(n)]$. Satz 4.3.1 impliziert $\exists x \in [-n, n]$ mit $\exp(x) = y$.

Zu (ii): Nach (i) ist $\log$ streng monoton wachsend, bijektiv. Die Stetigkeit von $\log$ folgt aus Satz 4.1.9.

Zu (iii): Ist klar: $\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \exists a, b \in \mathbb{R}: \exp(a) = x, \exp(b) = y$. Beachte

$$\log(x \cdot y) = \log(\exp(a) \cdot \exp(b)) = \underbrace{\log(\exp(a + b))}_{=a+b} = \log x + \log y.$$

$\square$

Definition 4.3.3. Für $x > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$x^z := \exp(z \cdot \log x) = e^{z \cdot \log x}.$$

Die Funktion $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^z \in \mathbb{C}$ (für $z \in \mathbb{C}$ fest) heißt Potenzfunktion zum Exponenten z .

Die Funktion $\mathbb{C}_+ \ni x \mapsto x^z \in \mathbb{C}$ (für $x > 0$ fest) heißt Exponentialfunktion zur Basis x .

Als Komposition der stetigen Funktionen sind beide Funktionen (Potenzfunktion und Exponentialfunktion) stetig. Es gelten die Potenzgesetze:

$$(xy)^z = x^z y^z, \quad x^{z+w} = x^z \cdot x^w, \quad (x^a)^z = x^{az}, \quad \forall x > 0, y > 0, z, w \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}.$$

Es gilt auch:

(i) $x^a < x^b$, wenn $x > 1$ und $a < b$.

(ii) $x^a < y^a$, wenn $0 < x < y$ und $a > 0$.

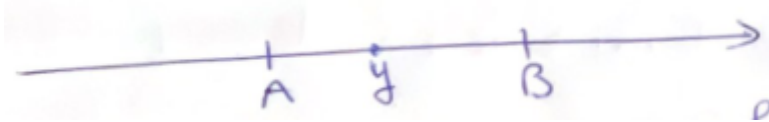
Wenn $z \in \mathbb{Q}$, ist x^z gleich der rationalen Potenz x^z in der Definition 1.5.7.

Satz 4.3.4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Beweis. Wir setzen

$$B := \sup f(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

$$A := \inf f(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$



und zeigen, dass $A, B) \subset f(I)$.

Sei $y \in (A, B)$. Nach Definition von $\sup$ und $\inf$ gibt es $a \in I, b \in I$ mit $A \leq f(a) < y$ und $y < f(b) \leq B$. Dann $f(a) < y < f(b)$. Zwischenwertsatz impliziert $\exists x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$. Es folgt $(A, B) \subset f(I)$. Andererseits wegen der Definition von A, B gilt $f(I) \subset [A, B]$. Daher ist $f(I)$ von den folgenden Formen: $[A, B], (A, B], (A, B), [A, B)$, welche Intervalle sind. Woche 11 $\square$

Satz 4.3.5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann sind äquivalent:

(i) f ist injektiv.

(ii) f ist streng monoton.

In diesem Fall ist $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ stetig und streng monoton.

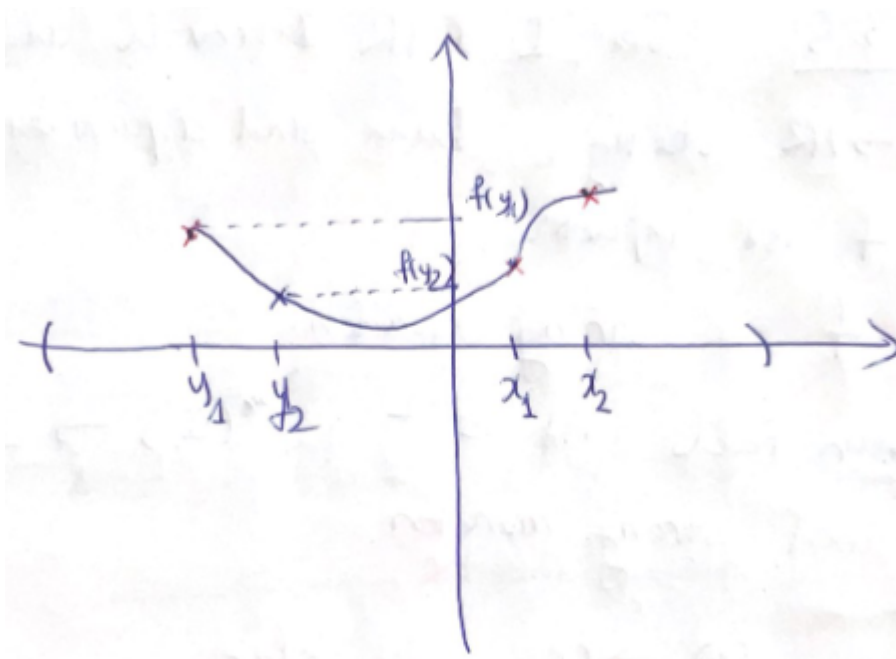
Beweis. (ii) $\implies$ (i): Ist klar.

(i) $\implies$ (ii): Wir nehmen an, dass f weder streng monoton wachsend, noch streng monoton fallend ist. Es folgt

$\exists x_1 < x_2, x_1, x_2 \in I: f(x_1) \leq f(x_2)$ (da f nicht streng monoton fallend), und

$\exists y_1, y_2 \in I: y_1 < y_2 \wedge f(y_1) \geq f(y_2)$ (da f nicht streng monoton wachsend).

Wegen der Injektivität von f erhält man $f(x_1) \neq f(x_2), f(y_1) \neq f(y_2)$. Deshalb gilt $f(x_1) < f(x_2)$ und $f(y_1) > f(y_2)$.



Betrachte

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f((1-t)x_1 + ty_1) - f((1-t)x_2 + ty_2),$$

welche stetig ist, und

$$g(0) = f(x_1) - f(x_2) < 0, \quad g(1) = f(y_1) - f(y_2) > 0.$$

Nach Zwischenwertsatz gilt $\exists t_0 \in [0, 1]$ mit $g(t_0) = 0$, d.h.

$$f((1-t_0)x_1 + t_0y_1) = f((1-t_0)x_2 + t_0y_2), \text{ aber } (1-t_0)x_1 + t_0y_1 < (1-t_0)x_2 + t_0y_2.$$

Das widerspricht der Injektivität von f . Daher (i) $\implies$ (ii).

Nun sei f stetig injektiv. Nach Satz 4.1.9 ist f^{-1} stetig. Diese ist auch streng monoton, da das der Fall für f ist.

□

4.4 Satz von Maximum und Minimum

Definition 4.4.1. Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. f heißt nach oben beschränkt (bzw. nach unten beschränkt), wenn $f(D)$ nach oben beschränkt (bzw. nach unten beschränkt) ist. Setzen wir (f beliebig)

$$\sup_D f := \sup f(D) = \sup \{fz \mid z \in D\} \subset \overline{\mathbb{R}},$$

$$\inf_D f := \inf f(D) = \inf \{fz \mid z \in D\} \subset \overline{\mathbb{R}}.$$

f heißt beschränkt, wenn f nach unten und oben beschränkt ist. Beachte

$$f \text{ ist nach oben beschränkt} \iff \sup_D f < \infty,$$

$$f \text{ ist nach unten beschränkt} \iff \inf_D f > -\infty.$$

Definition 4.4.2. Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f ihr Maximum (bzw. Minimum) annimmt, wenn $f(0)$ ein Maximum (bzw. Minimum) hat. Setzen

$$\max_D f := \max f(D), \quad \min_D f := \min f(D),$$

wenn $\max f(D)$, $\min f(D)$ existieren. Die Zahlen $\max_D f$, $\min_D f$ heißen Maximum bzw. Minimum.

Es gilt

$$f \text{ nimmt ihr Maximum an} \iff \exists x_1 \in D \forall x \in D: f(x_1) \geq f(x)$$

$$\iff \exists x_1 \in D: f(x_1) = \sup_D f.$$

$$f \text{ nimmt ihr Minimum an} \iff \exists x_2 \in D \forall x \in D: f(x_2) \leq f(x)$$

$$\iff \exists x_2 \in D: f(x_2) = \inf_D f.$$

Ein Punkt x_1 (bzw. $x_2 \in D$) wie oben heißt Maximalstelle (bzw. Minimalstelle) von f .

Satz 4.4.3. Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres kompaktes Intervall. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f ihr Maximum und Minimum an (insbesondere ist f beschränkt).

Beweis. Sei $M := \sup f([a, b]) \in (-\infty, \infty]$. Dann gibt es $y_n \in f([a, b])$ mit $y_n \rightarrow M$, $n \rightarrow \infty$. Sei $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) = y_n$. Nach Bolzano-Weierstraß, $\exists$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \rightarrow \xi_1 \in [a, b]$. Wegen der Stetigkeit gilt $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\xi_1)$ für $k \rightarrow \infty$. Andererseits hat man $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \rightarrow M$. Daher erhält man $M = f(\xi_1) < \infty$ und $f(\xi_1) = M = \sup f([a, b]) = \max f(D)$. Anders gesagt, f nimmt sein Maximum an. Analog für das Minimum. $\square$

Bemerkung. Kompaktheit des Intervalls ist wesentlich! Betrachte

$$\begin{array}{ll} f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} & \text{stetig, aber unbeschränkt,} \\ g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x & \text{stetig, beschränkt.} \end{array}$$

$$\sup g(0, 1) = 1, \quad \inf g(0, 1) = 0, \quad 0 < g(x) < 1, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Also nimmt g ihr Maximum und Minimum nicht an.

Folgerung 4.4.4. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f([a, b]) = [m, M]$, wobei $m = \min_{[a, b]} f$, $M = \max_{[a, b]} f$.

Beweis. Aus Satz 4.4.3 existieren $\max f$ und $\min f$ ($D = [a, b]$). Sei $a', b' \in [a, b]$ mit $f(a') = m$ und $f(b') = M$. Zwischenwertsatz impliziert $[m, M] \subset f([a', b'])$. Andererseits $f([a', b']) \subset f([a, b]) \subset [m, M]$ wegen der Definition der m, M . $\square$

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, d.h.

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0 \quad \forall y \in D \text{ mit } |y - x| < \delta \text{ gilt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Man bemerkt, δ hängt von x und ε ab.

Definition 4.4.5. Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$. f heißt gleichmäßig stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta \text{ gilt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Informell kann man sagen, für gleichmäßig stetige Funktionen kann δ unabhängig von x gewählt werden.

Beispiel.

- (i) Ist f Lipschitz-stetig, so ist f gleichmäßig stetig.
- (ii) Sei $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$. f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Beweis. Angenommen, f ist gleichmäßig stetig:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in (0, 1) \text{ mit } |x - y| < \delta \text{ gilt } \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| < \varepsilon.$$

Wähle $\varepsilon = 1$. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ mit $\frac{1}{n} < \delta$. Für $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{2n}$ gilt $|x - y| = \frac{1}{2n} < \delta$ und $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = |2n - n| = n > 1$. Widerspruch! $\square$

Satz 4.4.6. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Angenommen, f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n \geq 1 \exists x_n, y_n \in [a, b] \text{ mit } |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ und } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon. \quad (10)$$

Bolzano-Weierstraß $\implies \exists x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$. Da $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$, gilt $y_{n_k} \rightarrow x_0$. Wegen der Stetigkeit bekommt man

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}).$$

Folglich $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0$. Widerspruch zu (10)! □

4.5 Fortsetzung stetiger Funktionen und Grenzwerte

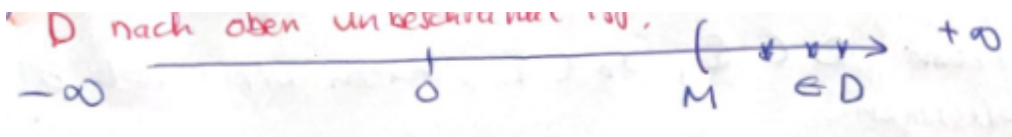
Definition 4.5.1. Ein Punkt $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ heißt Häufungspunkt einer Menge D in $\mathbb{R}$, wenn jede Umgebung von x_0 (in $\overline{\mathbb{R}}$) unendlich viele Punkte von D enthält.

In diesem Fall, wenn $x_0 = +\infty$ oder $-\infty$, heißt x_0 uneigentlicher Häufungspunkt von D .

Analog heißt $x_0 \in \mathbb{C}$ Häufungspunkt einer Menge $D \subset \mathbb{C}$, wenn jede Umgebung von x_0 in $\mathbb{C}$ unendlich viele Punkte von D enthält.

Bemerkung.

- (i) Man kann $\overline{\mathbb{C}}$ betrachten und Häufungspunkte in $\overline{\mathbb{C}}$ einer Menge $D \subset \mathbb{C}$ definieren. Diesen Fall besprechen wir nicht in der Vorlesung.
- (ii) $x_0 \in \infty \in \overline{\mathbb{R}}$ ist ein Häufungspunkt einer Menge D in $\mathbb{R} \iff \forall M > 0$, hat die Menge $(-M, \infty) \cap D$ unendlich viele Elemente $\iff D$ nach oben unbeschränkt ist.



Analog für $x_0 = -\infty$.

- (iii) Der Punkt x_0 kann Element von D sein oder nicht; z.B. 0 ist Häufungspunkt von $[0, 1]$ und auch von $(0, 1)$.



- (iv) Ein Häufungswert einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht derselbe wie ein Häufungspunkt der Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, z.B. sei $z_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist 1 ein Häufungswert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aber kein Häufungswert von $\{x_n \mid x \in \mathbb{N}\} = \{1\}$ (welche nur ein Element enthält).

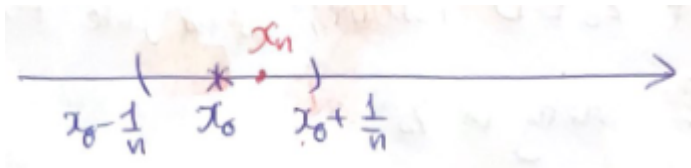
Lemma 4.5.2. Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) x_0 ist ein Häufungspunkt von D .
- (ii) Jede Umgebung von x_0 in $\overline{\mathbb{R}}$ enthält einen von x_0 verschiedenen Punkt aus D .
- (iii) $\exists$ eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$ und $x_n \neq x_0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Wenn $D \subset \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{C}$, haben wir auch ähnliche Aussagen.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Klar.

(ii) $\implies$ (iii): Wähle $x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \cap (D \setminus \{x_0\}) \forall n \in \mathbb{N}$.



Dann gilt $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$ und $x_n \neq x_0 \forall n$.

(iii) $\implies$ (i): Sei $(x_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \rightarrow x_0$ für $n \rightarrow \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_1} \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$.

Wähle $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 > n_1$, $x_{n_2} \in (x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1)$ und $x_{n_2} \neq x_0$, wobei $\varepsilon_1 := |x_0 - x_{n_1}|$. Dann $x_{n_2} \neq x_{n_1}$. Sei $\varepsilon_2 := |x_{n_2} - x_0| > 0$, und wähle $x_{n_3} \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$. Dann gilt $x_{n_3} \notin \{x_{n_1}, x_{n_2}\}$.

Durch Induktion konstruieren wir also eine Folge $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ von paarweise verschiedenen Punkten in $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$.

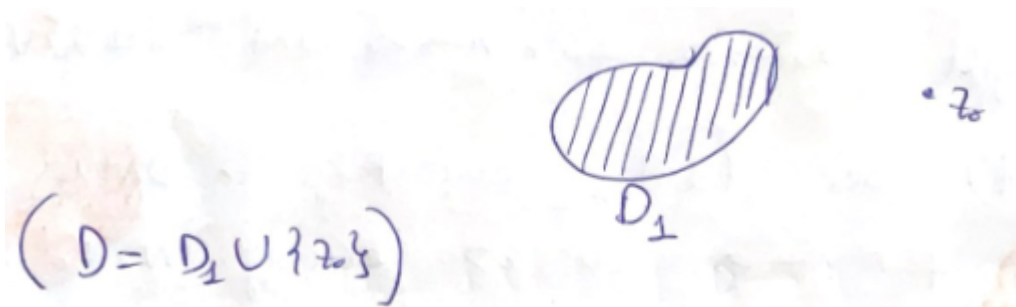
□

Definition 4.5.3. Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt isolierter Punkt ($D \subset \mathbb{C}$), wenn es $\delta > 0$ mit $B_\delta(x_0) \cap D = \{x_0\}$ gibt.

Bemerkung.

(i) Wenn $z \in D$, ist z entweder isoliert oder Häufungspunkt von D (Lemma 4.5.2 (ii)).

(ii) Ist $z_0 \in D$ isoliert, so ist jede Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in z_0 .

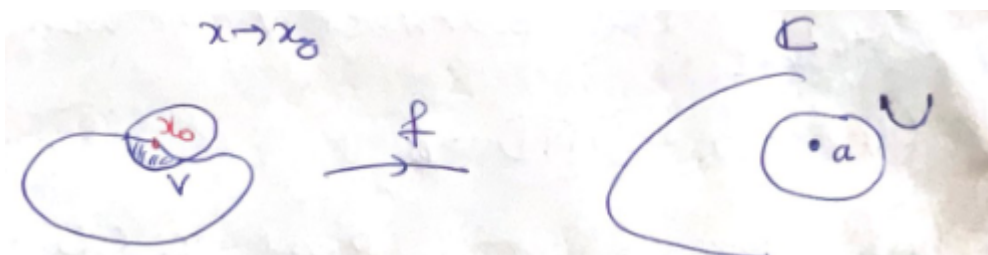


Definition 4.5.4. (i) Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von D , $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Wir sagen, dass $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 den Grenzwert a hat, wenn es zu jeder Umgebung U von a eine Umgebung V von x_0 mit

$$f(V \cap (D \setminus \{x_0\})) \subset U$$

gibt.

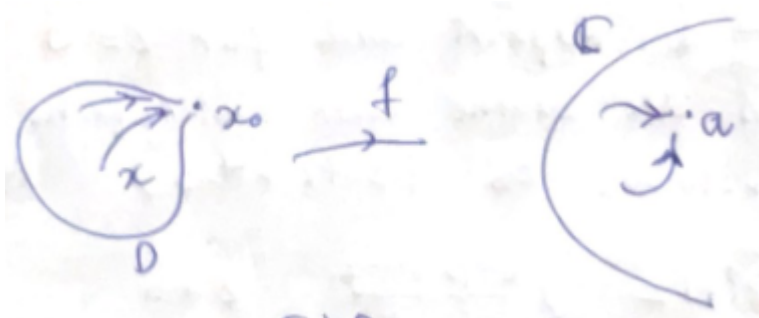
Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.



- (ii) Analog sei $D \subset \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D , $a \in \mathbb{C}$. Wir sagen, dass $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ in x_0 den Grenzwert a hat, wenn $\forall$ Umgebung U von a in $\mathbb{C}$, $\exists$ Umgebung V von x_0 in $\mathbb{C}$ mit $f(V \cap (D \setminus \{x_0\})) \subset U$. Man schreibt $\lim_{z \rightarrow x_0} f(z) = a$. Analog auch für $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Bemerkung 4.5.5. (i) Ist $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D , so ist $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig genau dann, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

- (ii) In der Definition 4.5.4 muss x_0 in D nicht unbedingt sein, und f muss auf x_0 nicht unbedingt definiert werden. Der Punkt ist es, wir interessieren uns für das Verhalten von f in der Nähe von x_0 .



- (iii) Sei $x_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ ein Häufungspunkt von D , $a \in \mathbb{C}$. Sei $F: D \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D \\ a & z = x_0 \end{cases}.$$

Dann gilt

$$F \text{ ist stetig in } x_0 \iff \lim_{z \rightarrow x_0} F(z) = F(x_0) \iff \lim_{z \rightarrow x_0} f(z) = a$$

Wenn eine der drei äquivalenten Aussagen gilt, heißt F die stetige Fortsetzung von f in x_0 .

Beispiel 4.5.6. (i) Seien $D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f: D \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{\exp(z)-1}{z}$. $z_0 = 0$ ist ein Häufungspunkt von D . Für $z \in D$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1 \right) = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots =: P(z).$$

$P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert auch für $z = 0$ und ist die Summe einer Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ (Satz 3.4.5). Also ist

$$P(z) = \begin{cases} \frac{\exp(z)-1}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

eine stetige Funktion auf $\mathbb{C}$ (Folgerung 4.2.7). Wir erhalten

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z) - 1}{z} = 1.$$

Analog ergibt sich

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2}.$$

(ii) Seien $D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = 0$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n \sin \frac{1}{x}$. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0$$

(weil: $|x^n \sin \frac{1}{x}| \leq |x^n| \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$). Also ist

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

die stetige Fortsetzung von f in 0.

(iii) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

Beweis.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{für } x > 0$$

also $\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!}$. Zu $M \in \mathbb{R}$ wähle $d = \max\{0, M(n+1)!\}$. Für $x \in (d, \infty)$ gilt dann

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \geq M.$$

□

Satz 4.5.7 (Folgenkriterium). Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Es gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ genau dann, wenn für alle gegen x_0 konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{x_0\}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

Analog für $D \subset \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ (x_0 Häufungspunkt von D).

Beweis. Nur für $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Beachte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff F: D \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in D \setminus \{x_0\} \\ a & x = x_0 \end{cases}$$

$$\text{stetig in } x_0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = a = F(x_0) \quad \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \text{ konvergiert gegen } x_0$$

(Folgenkriterium für Stetigkeit)

□

Beispiel. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ existiert nicht. Betrachte

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } x_n = \frac{1}{n\pi}, \quad (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{y_n} = 1.$$

(Wir werden in Kapitel 5 die Zahl π analytisch definieren.)

Folgerung 4.5.8. (i) Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ Häufungspunkt von D , $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Es gelte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = a + b, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = a \cdot b, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{a}{b}$$

(falls $g(x) \neq 0$ in einer Umgebung von x_0), sofern die Ausdrücke auf der rechten Seite definiert sind. Definiert sind hierbei

$$\begin{aligned} \infty + a &= \infty, & -\infty + a &= -\infty, & \frac{a}{\infty} &= \frac{a}{-\infty} = 0 & \text{für } a \in \mathbb{R}, \\ \infty \cdot a &= \infty \text{ für } a > 0, & \infty \cdot a &= -\infty \text{ für } a < 0, & \infty + \infty &= \infty, & \infty \cdot \infty &= \infty, \\ (-\infty) + (-\infty) &= -\infty, & (-\infty) \cdot \infty &= -\infty. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke wie $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot (-\infty)$ sind nicht definiert. Analog für $D \subset \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$, oder $D \subset \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{C}$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

(ii) Seien $f, g: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ Häufungspunkt von D mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}, \quad f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in D \setminus \{x_0\}.$$

Dann gilt $a \leq b$.

(iii) Seien $D \subset \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $x_0, w_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, x_0 Häufungspunkt von D , w_0 Häufungspunkt von E .

Seien $f: D \rightarrow E$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = w_0, \quad \lim_{x \rightarrow w_0} g(y) = a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = a.$$

Analog für $D \subset \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{C}$, $x_0, w_0, a \in \mathbb{C}$, $f: D \rightarrow E$, $g: E \rightarrow \mathbb{C}$.

Beispiel.

(i) Wir berechnen $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$. $D = E = \mathbb{R}$, $x_0 = -\infty$, $w_0 = \infty$, $f(x) = -x$, $g(y) = e^{-y}$. Beachte $e^x = (g \circ f)(x)$, $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -\infty$, $g(y) \rightarrow 0$ für $y \rightarrow \infty$ (da $e^y \rightarrow \infty$ für $y \rightarrow \infty$). Daher $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

(ii) Wir berechnen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$. Setze

$$y = f(x) = \log(x+1), \quad f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log(1+x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0.$$

Ferner gilt $x = e^y - 1$, also

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{y}{e^y - 1} =: g(y),$$

wobei $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Da $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$, gilt

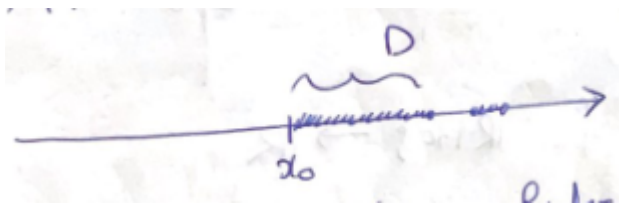
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) = 1.$$

Analog hat man $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ (setze $y = \log x$) und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\log x^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\log x}{x}\right) \rightarrow 1.$$

Definition 4.5.9 (Einseitige Grenzwerte). Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

- (i) x_0 heißt rechtsseitiger (bzw. linksseitiger) Häufungspunkt von D , wenn x_0 Häufungspunkt von $(x_0, \infty) \cap D$ (bzw. $(-\infty, x_0) \cap D$) ist.

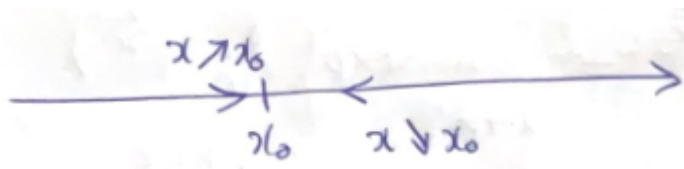


- (ii) Sei x_0 rechtsseitiger (bzw. linksseitiger) Häufungspunkt von D . Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ hat in x_0 den rechtsseitigen (bzw. linksseitigen) Grenzwert $a \in \overline{\mathbb{R}}$, wenn $f|_{D \cap (x_0, \infty)}$ (bzw. $f|_{D \cap (-\infty, x_0)}$) den Grenzwert $a \in \overline{\mathbb{R}}$ in x_0 hat.

Notation:

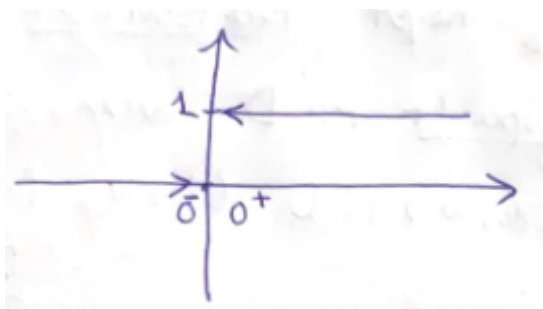
$$f(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) := \lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D \cap (x_0, \infty)} = a,$$

$$f(x_0^-) := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) := \lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D \cap (-\infty, x_0)} = a.$$



Beispiel.

- (i) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$. Dann $f(0^-) = 0$, $f(0^+) = 1$.



- (ii) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin \frac{1}{x}$
Die Grenzwerte $f(0^+)$, $f(0^-)$ existieren nicht.

Satz 4.5.10. (i) Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, x_0 ein links- und rechtsseitiger Häufungspunkt von D . Dann $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existent $\iff f(x_0^+), f(x_0^-)$ existieren und sind gleich. In diesem Fall gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0^+) = f(x_0^-).$$

(ii) Sei zusätzlich $x_0 \in D$. Dann gilt: f ist stetig in $x_0 \iff f(x_0^+), f(x_0^-)$ existieren und $f(x_0) = f(x_0^+) = f(x_0^-)$ gilt.

Beweis. Direkt aus dem Folgenkriterium (Satz 4.5.7). □

5 Differenzierbarkeit

5.1 Definition und erste Eigenschaften

Woche
12

Definition 5.1.1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall. Sei $f: I \rightarrow \mathbb{C}$. f heißt differenzierbar im Punkt $x_0 \in I$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dann heißt dieser Limes Ableitung von f in x_0 . Schreibweise:

$$f'(x_0) := \frac{df(x_0)}{dx} := \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

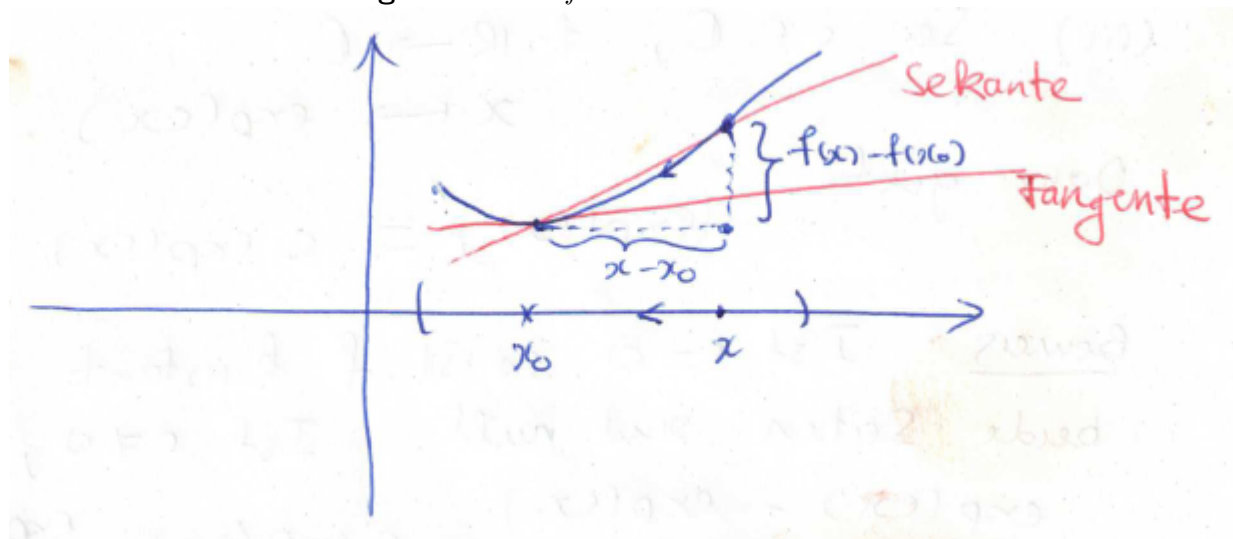
Ist f in allen Punkten $x_0 \in I$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar in I . In diesem Fall heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} f': I &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

die Ableitung von f .

Falls x_0 ein Randpunkt von I ist, so ist der Grenzwert in 5.1.1 als einseitiger Grenzwert zu verstehen.

Geometrische Erläuterung Betrachte $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.



Die Gerade durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ heißt Sekante und ist der Graph der Abbildung

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Dabei ist $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ die Steigung der Sekante.

Angenommen, f ist differenzierbar in x_0 . Dann wenn x zu x_0 läuft, nähert die Sekante sich an eine Gerade an, die Tangente an den Graphen von f im $(x_0, f(x_0))$ heißt.

Beispiel 5.1.2. (i) $f: I \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = x$ (konstant) $\forall x \in I$. Dann ist f differenzierbar und $f'(x) = 0 \forall x \in I$.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$. Dann $f'(x) = nx^{n-1} \forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) Sei $c \in \mathbb{C}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \exp(cx)$. Dann gilt $(\exp(cx))' = c \exp(cx) \forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Ist $c = 0$, so ist f konstant, und beide Seiten sind null. Ist $c \neq 0$, so gilt

$$\frac{\exp(cx) - \exp(cx_0)}{x - x_0} = c \exp(cx_0) \cdot \frac{\exp(cx - x_0) - 1}{c(x - x_0)}$$

$\rightarrow c \exp(cx_0)$ für $x \rightarrow x_0$. (4.5.6)

□

Satz 5.1.3. Sei $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann ist f stetig in x_0 .

Beweis.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{\rightarrow 0}$$

für $x \neq x_0$, $x \rightarrow x_0$. Es folgt $f(x) \rightarrow f(x_0)$ für $x \rightarrow x_0$.

□

Die Umkehrung ist falsch. Betrachte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ stetig in 0.

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

Wegen Satz 4.5.10 existiert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ nicht.

Satz 5.1.4 (Ableitungsregeln). Sind $f, g: I \rightarrow \mathbb{C}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar, so sind auch die Funktionen $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{C}$), $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar; falls $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar. Es gilt dann

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0),$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Beweis.

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0) + g'(x_0). \\ \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\rightarrow f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \\ \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(x_0)}{x - x_0} &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\ &\rightarrow \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \end{aligned}$$

□

Beispiel 5.1.5. (i) $c \in \mathbb{C}$, f differenzierbar in x_0 . Dann $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$.

(ii) Da $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ und $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ gilt:

$$\sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x$$

(iii) Setze $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ (wo $\cos x \neq 0$). Dann

$$\tan' x = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Satz 5.1.6 (Kettenregel). Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f: I \rightarrow J$, $g: J \rightarrow \mathbb{C}$. Ist f in $x_0 \in I$ und g in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar, so ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis.

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

für $x \rightarrow x_0$.

Bemerke, $f(x) \rightarrow f(x_0)$ für $x \rightarrow x_0$, deshalb

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = g'(f(x_0)).$$

□

Beispiel. Sei $a > 0$ fest,

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x = e^{x \log a} \end{aligned}$$

Dann $f = g \circ h$, wobei

$$\begin{array}{ll} h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \log a & y \mapsto e^y \end{array}$$

Da $\begin{cases} h'(x) = x' \log a = \log a \\ g'(y) = e^y \end{cases}$, gilt

$$(a^x)' = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

Insbesondere

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$

Satz 5.1.7. Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton und differenzierbar in $x_0 \in I$. Sei $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion (von f) $g: f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$, und es gilt

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

Beweis. Sei $y \in f(I)$ und $x := g(y)$. Dann $f(x) = y$.

Betrachte

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$$

für $x \rightarrow x_0$, denn $f'(x_0) \neq 0$. Es folgt

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

(da wenn $y \rightarrow y_0$, dann $x \rightarrow x_0$ wegen der Stetigkeit von y). □

Beispiel. $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

(i) $\log: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, also

$$\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0.$$

(ii) Sei $z \in \mathbb{C}$ und

$$\begin{array}{l} f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto x^z = e^{z \log x} \end{array}$$

Dann ist f differenzierbar, und

$$f'(x) = (e^{z \log x})'(z \log x)' = e^{z \log x} \frac{z}{x} = z x^{z-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

5.2 Mittelwertsätze

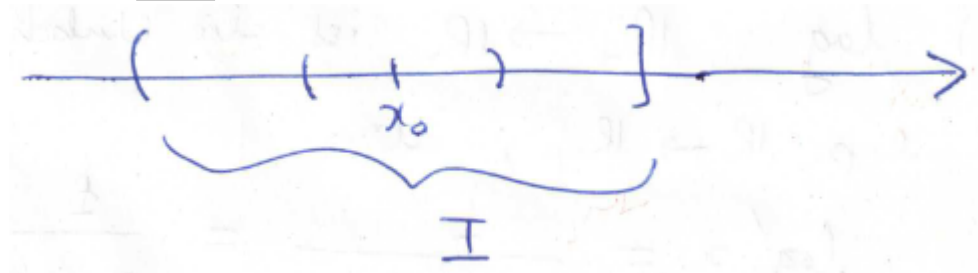
Definition 5.2.1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt innerer Punkt von I , wenn $\exists \delta > 0$ mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$.

Äquivalenterweise ist $x_0 \in I$ innerer Punkt $\iff x_0 \notin \{\sup I, \inf I\}$.

Die Menge

$$\overset{\circ}{I} := \{x \in I \mid x \text{ innerer Punkt von } I\} = (\inf I, \sup I)$$

heißt das Innere von I .



Definition 5.2.2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $x_0 \in I$.

(i) Die Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ hat in x_0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum), wenn $\exists \delta > 0$ mit $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$.

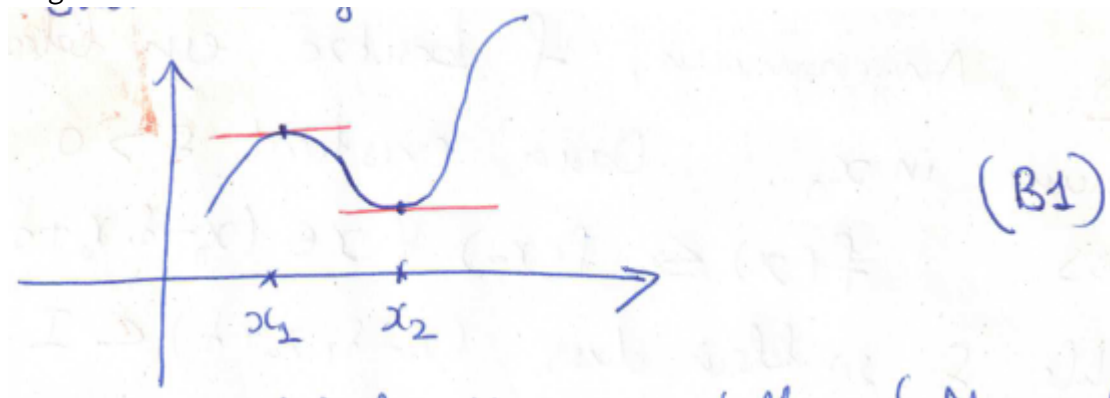
(ii) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ hat in x_0 ein globales Maximum (bzw. Minimum), wenn gilt

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in I.$$

Extremum ist der gemeinsame Oberbegriff für Maximum und Minimum. Dann heißt lokales Extremum lokales Maximum oder lokales Minimum. Analog für globales Extremum.

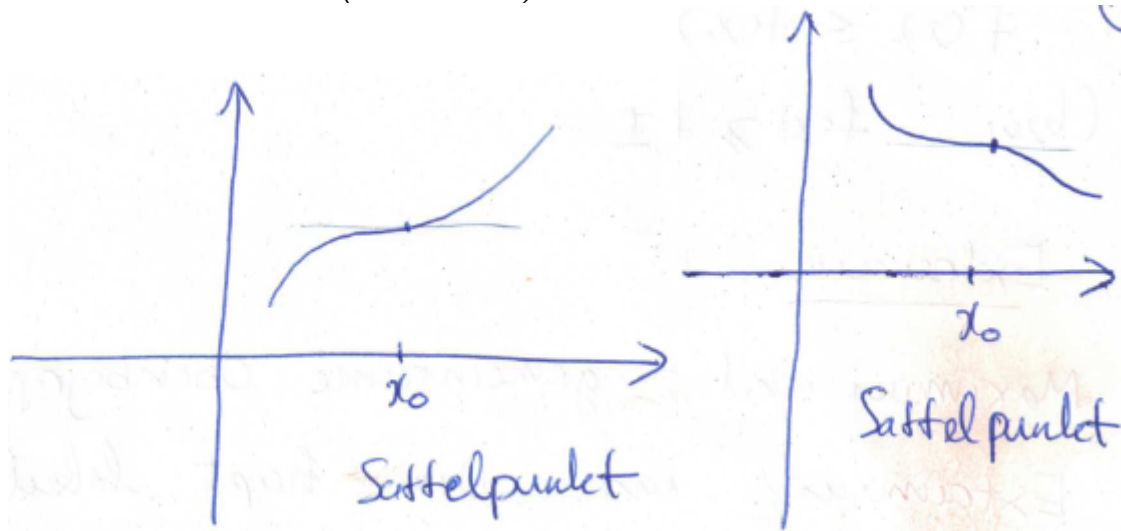
(iii) Ein innerer Punkt $x_0 \in I$ heißt kritischer Punkt von $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, wenn f differenzierbar in x_0 ist, und $f'(x_0) = 0$.

(iv) Ein kritischer Punkt $x_0 \in I$ heißt Sattelpunkt von f , wenn $\exists \delta > 0$ mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ und $f(x) < f(x_0)$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ und $f(x) > f(x_0)$ für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ oder umgekehrt.



x_1 : lokale Maximumstelle (Maximalstelle)

x_2 : lokale Minimumstelle (Minimalstelle)



Satz 5.2.3 (Notwendiges Extremwertkriterium). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ ein innerer Punkt, und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 . Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Geometrische Deutung: Die Tangente an den Graphen von f um $(x_0, f(x_0))$ ist parallel zur x -Achse (siehe (iv)).

Beweis. Angenommen, f besitze ein lokales Maximum in x_0 . Dann existiert $\delta > 0$, so dass

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

(wähle δ so klein, dass $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$). Da f differenzierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \nearrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0} \geq 0 \\ &= \lim_{x \searrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\leq 0} \leq 0. \end{aligned}$$

Es folgt $f'(x_0) = 0$.

Für ein lokales Minimum ist die Aussage analog zu beweisen. □

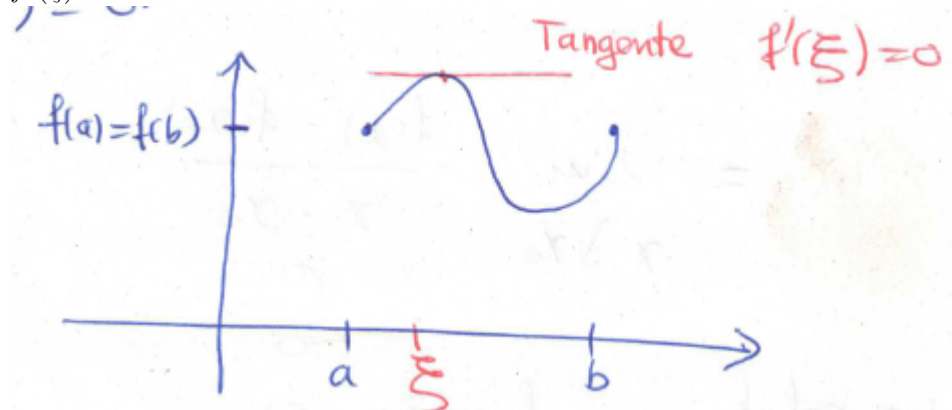
Bemerkung.

- (i) $f'(x_0) = 0$ ist nur eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum, z.B. $f(x) = x^3$. $x_0 = 0$, $f'(0) = 0$, aber f besitzt in 0 kein lokales Extremum.
- (ii) Wenn x_0 kein innerer Punkt ist, so ist die Aussage falsch, z.B.

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

$x_0 = 0$, dann ist x_0 eine Minimalstelle. f differenzierbar in 0, aber $f'(0) = 1$.

Satz 5.2.4 (Rolle). Sei $a < b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$. Die Funktion f sei in (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.



(Die Tangente an dem Graphen von f um $(\xi, f(\xi))$ ist parallel zur x -Achse.)

Beweis. Fall 1: f konstant. Dann $f'(\xi) = 0 \forall \xi \in (a, b)$.

Fall 2: f nicht konstant. Nach Stetigkeit und Satz 4.4.3 $\exists x_m, x_M \in [a, b]$ mit

x_m globale Minimalstelle,

x_M globale Maximalstelle.

Ist $x_m \in (a, b)$, so ist $f'(x_m) = 0$ wegen Satz 5.2.3.

Ist $x_m \in \{a, b\}$, dann gilt $f(x_m) = f(a) = f(b)$. Da f nicht konstant ist, bekommt man $f(x_M) \neq f(x_m) \implies x_M \in (a, b) \implies f'(x_M) = 0$ nach Satz 5.2.3.

□

Satz 5.2.5 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die in (a, b) differenzierbar sind. Dann $\exists \xi \in (a, b)$ mit

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Beweis. Sei $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Beachte $\begin{cases} h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b) \\ h \text{ stetig auf } [a, b], \text{ differenzierbar auf } (a, b) \end{cases}$

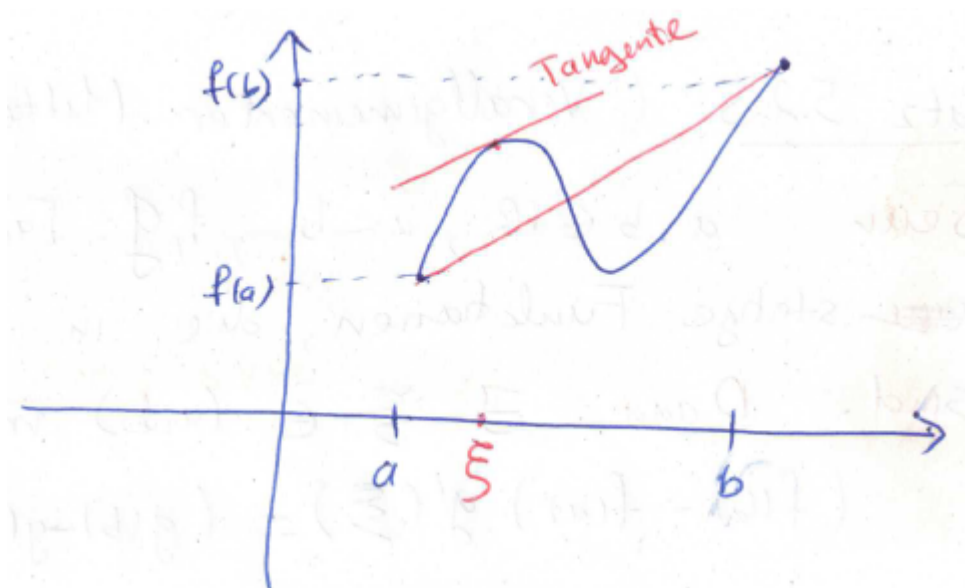
Satz von Rolle $\implies \exists \xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = 0$.

□

Satz 5.2.6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist. Dann $\exists \xi \in (a, b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Beweis. Wenden wir Satz 5.2.5 auf $g(x) = x$ an.



Für ξ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$, ist die Tangente um $(\xi, f(\xi))$ parallel zur Sekante durch $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. $\square$

5.3 Anwendungen des Mittelwertsatzes

Folgerung 5.3.1. (i) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und f auf $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar. Falls $f'(x) = 0 \forall x \in \overset{\circ}{I}$, dann ist f konstant.

(ii) Seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die auf $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar sind, und es gelte $f' = g'$ auf $\overset{\circ}{I}$. Dann $\exists c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c \forall x \in I$.

Beweis. (i) Seien $x, y \in I$, $x < y$. Nach Satz 5.2.6 $\exists \xi \in (x, y)$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y) = 0 \implies f \text{ konstant.}$$

(ii) Sei $h = f - g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $h' = f' - g' = 0$. Nach (i) ist h konstant. $\square$

Folgerung 5.3.2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar ist. Dann gilt

(i) Falls $f'(x) > 0 \forall x \in \overset{\circ}{I}$, dann ist f streng monoton wachsend.

(ii) Falls $f'(x) \geq 0 \forall x \in \overset{\circ}{I}$, dann ist f monoton wachsend.

(iii) Falls $f'(x) < 0 \forall x \in \overset{\circ}{I}$, dann ist f streng monoton fallend.

(iv) Falls $f'(x) \leq 0 \forall x \in \overset{\circ}{I}$, dann ist f monoton fallend.

Beweis. Zu (i): Seien $x, y \in I$, $x < y$. Satz 5.2.6 $\implies \exists \xi \in (x, y)$ mit

$$f(x) - f(y) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0} \underbrace{(x - y)}_{<0} < 0,$$

da $f'(\xi) > 0$. Deshalb ist f streng monoton wachsend. $\square$

Beispiel.

(i) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x > 0 \implies e^x$ streng monoton wachsend.

(ii) $f(x) = \log x$, $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \implies \log x$ streng monoton wachsend.

Folgerung 5.3.3. Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ ein kritischer Punkt (d.h. $f'(x_0) = 0$).

(i) Falls $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, x_0)$ und $f'(x) \geq 0 \forall x \in (x_0, b)$, so hat f in x_0 ein Minimum.

(ii) Falls

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, x_0) \quad \text{und} \quad f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (x_0, b),$$

so hat f in x_0 ein Maximum.

Beweis. Zu (i): Da $f' \leq 0$ auf (a, x_0) , ist f monoton fallend auf $[a, x_0]$, d.h. $f(x) \geq f(x_0) \forall x \leq x_0$.

Da $f' \geq 0$ auf (x_0, b) , ist f monoton wachsend auf $[x_0, b]$. Es folgt $f(x) \geq f(x_0) \forall x \geq x_0$. Anders gesagt hat f in x_0 ein Minimum.

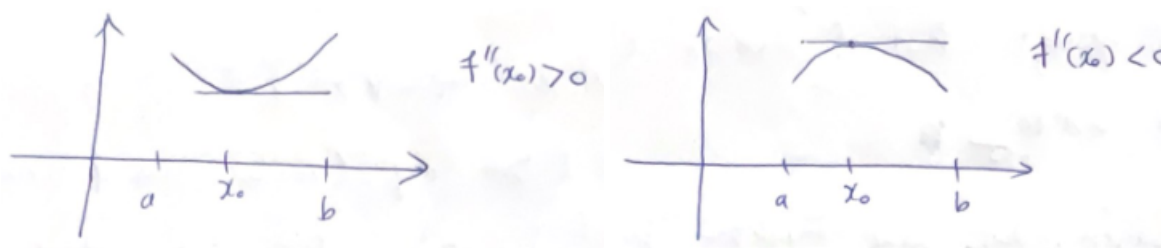
Zu (ii): Analog.

□

Wir sagen, dass eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ zweimal differenzierbar in $x_0 \in D$ ist ($D \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall), wenn $\exists \delta > 0$, so dass f differenzierbar auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$ und $f': (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in x_0 ist. Wir bezeichnen $f''(x_0) := (f')'(x_0)$ die Ableitung von f' in x_0 , diese wird die zweite Ableitung von f in x_0 genannt.

Folgerung 5.3.4. Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und zweimal differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$. Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so ist x_0 eine lokale Minimalstelle, d.h. f hat in x_0 ein lokales Minimum.

Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so ist x_0 eine lokale Maximalstelle, d.h. f hat in x_0 ein lokales Maximum.



Woche
13

Beweis. Sei $f''(x_0) > 0$ (der Fall $f''(x_0) < 0$ ist analog zu beweisen). Da

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Da $f'(x_0) = 0$, folgt daraus

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 & \text{für } x_0 - \varepsilon < x < x_0, \\ f'(x) &> 0 & \text{für } x_0 < x < x_0 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach Folgerung 5.3.2 ist f auf $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng monoton fallend, auf $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ streng monoton wachsend. Folglich besitzt f in x_0 ein lokales Minimum. $\square$

Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{C}$, ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall) heißt stetig differenzierbar, falls f differenzierbar und $f': I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist.

Satz 5.3.5 (Schranksatz). Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L := \max_{[a,b]} |f'|$, d.h.

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Beweis. Da f' stetig ist, ist $L < \infty$. Nach Mittelwertsatz gilt $\exists \xi \in (x, y)$ mit

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq L|x - y| \quad (x < y).$$

$\square$

Satz 5.3.6 (Regel von l'Hospital). Seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen auf dem Intervall $I = (a, b)$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$). Es gelte

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I,$$

und es existiere der Limes

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Dann folgt

1. Falls

$$\lim_{x \nearrow b} g(x) = \lim_{x \nearrow b} f(x) = 0,$$

$$\text{ist } g(x) \neq 0 \quad \forall x \geq x_0 \text{ (für ein } x_0 \in (a, b)) \text{ und } \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

$$2. \text{ Falls } \lim_{x \nearrow b} g(x) = \pm\infty, \text{ ist } g(x) \neq 0 \text{ für } x \geq x_0 \text{ (} a < x_0 < b \text{), und es gilt } \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Analoge Aussage gelten für den Grenzübergang $x \searrow a$.

Beweis. **Zu 1:** Angenommen $b \in \mathbb{R}$. Seien

$$\begin{aligned} \tilde{f}, \tilde{g}: (a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) & x \in (a, b) \\ b &\mapsto 0 \end{aligned}$$

die stetige Fortsetzungen von f, g auf $(a, b]$. Sei $x \in (a, b)$. Dann gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(b)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(b)} = \frac{\tilde{f}'(\xi_x)}{\tilde{g}'(\xi_x)}$$

(ξ_x hängt von x ab). Wenn $x \rightarrow b$, gilt $\xi_x \rightarrow b$, $\xi_x \in (a, b)$. Es folgt

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{\tilde{f}'(\xi_x)}{\tilde{g}'(\xi_x)} = c$$

Nun betrachte den Fall $b = \infty$. Sei $\tilde{a} \in \mathbb{R}_+$ mit $(\tilde{a}, \infty) \subset (a, \infty) = (a, b)$.



Definieren

$$F, G: \left(0, \frac{1}{\tilde{a}}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(y) := f\left(\frac{1}{y}\right), \quad G(y) := g\left(\frac{1}{y}\right), \quad \forall y \in \left(0, \frac{1}{\tilde{a}}\right).$$

$$F'(y) = -f'\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^2}, \quad G'(y) = -g'\left(\frac{1}{y}\right) \frac{1}{y^2}.$$

Man sieht leicht, dass F, G die Bedingung des Satzes für den Grenzübergang $\searrow 0$:

$$\lim_{y \searrow 0} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c, \quad \lim_{y \searrow 0} F(y) = \lim_{y \searrow 0} G(y) = 0.$$

Daher nach dem ersten Fall (für Grenzübergang $\searrow 0$) gilt

$$\lim_{y \searrow 0} \frac{F(y)}{G(y)} = c.$$

Anders gesagt bekommt man

$$\lim_{x \nearrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Zu 2: Da $g'(0) \neq 0 \forall x \in I$, gilt entweder $g'(x) > 0 \forall x \in I$ oder $g'(x) < 0 \forall x \in I$.
(Beweis: g muss injektiv sein wegen Satz 5.2.3, deshalb ist g streng monoton, nach Satz 4.3.5).

Durch Vorzeichenwechsel, o.B.d.A. nehmen wir an, dass

$$g'(x) > 0 \quad \forall x \in I \quad (\implies \lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty)$$

und

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \neq -\infty.$$

Zu $\gamma < c \exists d \in I$ (wähle $\gamma = c - \varepsilon$) mit

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > \gamma \quad \text{für } d < x < b.$$

Nach Mittelwertsatz $\exists \xi \in (d, b)$ mit

$$\frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > \gamma$$

oder

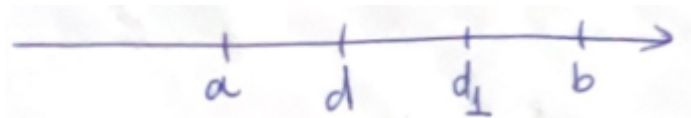
$$f(x) - f(d) > \gamma (g(x) - g(d)) \quad \text{für } d < x < b$$

(erinnere: $g' > 0 \implies g$ monoton wachsend). Nach Division durch $g(x)$ lautet die Ungleichung

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \gamma + \frac{f(d) - \gamma g(d)}{g(x)} \rightarrow \gamma \quad \text{für } x \nearrow b, \text{ da } g(x) \rightarrow \infty,$$

d.h. zu

$$\varepsilon > 0 \exists d_1 \in (a, b): \frac{f(x)}{g(x)} > \underbrace{\gamma - \varepsilon}_{=c-2\varepsilon} \quad \forall d_1 < x < b.$$



Ist $c = \infty$, kann man γ beliebig groß wählen und erhält

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Ist c endlich, so kann man $\gamma \geq c + \varepsilon > c$ wählen und durch ähnliche Schätzungen mit „<“ Zeichen anstelle „>“, und erhält

$$\frac{f(x)}{g(x)} < c + 2\varepsilon \quad \text{für } x \in (d_2, b) \text{ für ein } d_1 < d_2 < b.$$

Es folgt

$$c - 2\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < c + 2\varepsilon \quad \forall x \in (d_2, b) \implies \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

□

Beispiel.

1. $\lim_{x \searrow 0} x \log x$: Setze $f(x) = \log x$ und $g(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$.

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$$

$$\lim_{x \searrow 0} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Nach l'Hospital gilt

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \left(\text{Typus } \frac{\infty}{\infty} \right)$$

- 2.

$$\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \searrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = 0$$

($f(x) = x - \sin x$, $g(x) = x \sin x$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$)

Zweimal l'Hospitalsche Regel anwenden.

5.4 Trigonometrische Funktionen

Wir untersuchen trigonometrische Funktionen $\sin$, $\cos$.

Lemma 5.4.1. Für $x \in (0, 2]$ gilt

$$\sin x > x - \frac{x^3}{3!}, \quad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

Erinnere

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Da

$$\frac{x^{2k+2}}{(k+2)!} \cdot \frac{k!}{x^k} = \frac{x^2}{(k+1)(k+2)} \leq \frac{x^2}{6} \leq \frac{2}{3} < 1$$

für $x \in (0, 2]$ sieht man, dass

$$\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!} \right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ monoton fallend,} \quad \left(\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ monoton fallend.}$$

Es folgt

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad \sin x > x - \frac{x^3}{3!} = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3} \right) > 0, \quad \forall x \in (0, 2].$$

Lemma 5.4.2. $\cos: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ hat genau eine Nullstelle x_0 , welche in $(1, 2]$ liegt.

Beweis. *Erinnere*

$$\sin x > 0 \text{ für } x \in [0, 2], \quad \cos' x = -\sin x < 0 \text{ für } x \in [0, 2].$$

Deshalb ist $\cos$ streng monoton fallend in $[0, 2]$.

Außerdem gilt

$$\cos 0 = 1 > 0, \quad \cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Zwischenwertsatz impliziert $\cos: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine Nullstelle x_0 in $[0, 2]$, welche eindeutig wegen der Injektivität von $\cos$ ist.

Da $\cos 1 > 1 - \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} > 0$, liegt x_0 in $(1, 2)$. □

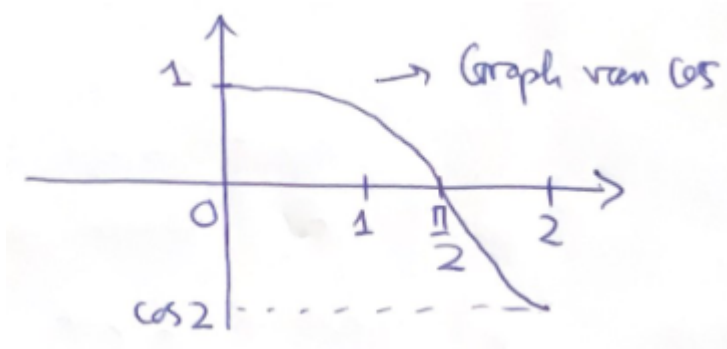
Definition 5.4.3. Setze $\pi := 2x_0$ (d.h. $x_0 = \frac{\pi}{2}$). Dies ist die analytische Definition von π . Wir sehen später, dass diese Definition mit der in der Schule übereinstimmt.

Bemerkung.

1. Wegen $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \implies \sin \frac{\pi}{2} = \pm 1$. Da $\sin x > 0$ für $x \in (0, 2]$, gilt $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

2.

$$\forall z \in \mathbb{C}: \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \cos \frac{\pi}{2} - \sin z \sin \frac{\pi}{2} = -\sin z$$



$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \sin z \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos z = \cos z$$

Insbesondere Analog bekommt man

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$\sin x$	0	1	0	-1	0

- $\cos(z + \pi) = -\cos z$, $\sin(z + \pi) = -\sin z$
- $\cos(z + 2\pi) = \cos z$, $\sin(z + 2\pi) = \sin z$, d.h. $\cos, \sin$ 2π -periodische Funktionen
- $\cos x > 0$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (da $\cos x > 0$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$), $\cos x = \cos(-x)$
- $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin x > 0$, $x \in (0, \pi)$, $\sin x < 0$, $x \in (\pi, 2\pi)$ (da $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$)
- $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = 0 \iff x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ streng monoton wachsend, bijektiv, stetig.
- $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ streng monoton fallend, bijektiv, stetig.
- $\arcsin = \sin^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist stetig in $[-1, 1]$ und differenzierbar in $(-1, 1)$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $\arccos = \cos^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ ist stetig in $[-1, 1]$ und differenzierbar in $(-1, 1)$

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $\tan: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ ist bijektiv, streng monoton wachsend, differenzierbar.

$$\arctan := \tan^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \underbrace{\arctan' x}_{x \in \mathbb{R}} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \underbrace{\tan' x}_{x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

- $\cot: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ ist bijektiv, streng monoton fallend und differenzierbar.

$$\operatorname{acot} := \cot^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi), \quad \operatorname{acot}' x = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in (0, \pi).$$

Satz 5.4.4. Jede komplexe Zahl lässt sich schreiben als $z = re^{i\varphi}$, wobei $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r = |z| \geq 0$. Für $z \neq 0$ ist φ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt.

Man nennt φ das Argument der komplexen Zahl $z = re^{i\varphi}$.

Beweis. Für $z = 0$ ist $z = 0 \cdot e^{i\varphi}$ mit beliebigem φ . Sei jetzt $z \neq 0$, $r := |z|$ und $w := \frac{z}{r}$. Dann ist $|w| = 1$. Schreibe $w = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Also $a^2 + b^2 = 1 \implies a, b \in [-1, 1]$. Deshalb ist $\alpha := \arccos a$. Da $\cos \alpha = a$, folgt

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - a^2} = \pm b.$$

Wir setzen

- $\varphi := \alpha$ falls $\sin \alpha = b$,
- $\varphi := -\alpha$ falls $\sin \alpha = -b$.

In jedem Fall ist dann

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi = a + ib = w.$$

Damit gilt $z = re^{i\varphi}$.

Nun ist $\varphi' \in \mathbb{R}$ mit $re^{i\varphi'} = re^{i\varphi}$, $r \neq 0$, so gilt

$$e^{i\varphi'} = e^{i\varphi} \iff e^{i(\varphi - \varphi')} = 1 \iff \varphi - \varphi' = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(Eigenschaften von $\cos$ und $\sin$). □

Bemerkung 5.4.5. 1. Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen.

Sei $z = r_1 e^{i\varphi}$, $w = r_2 e^{i\psi}$. Dann ist

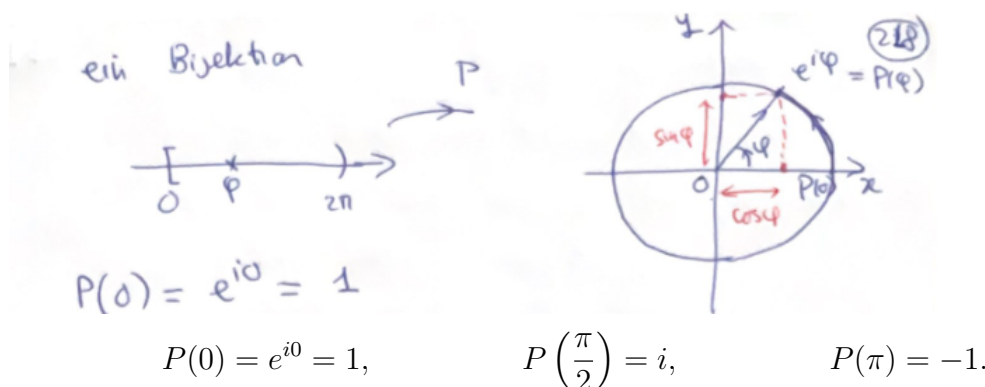
$$zw = r_1 r_2 e^{i(\varphi + \psi)}.$$

Man erhält also das Produkt zweier komplexer Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert.

2. Nach Satz 5.4.4 ist die Abbildung

$$P: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ \varphi \mapsto e^{i\varphi}$$

eine Bijektion ($\mathbb{S}^1$ ist der Einheitskreis).



Man kann zeigen, dass die Länge des Bogens $\widehat{P(0)P(\varphi)}$ gleich genau φ ist.

Anders gesagt, ist φ der Winkel (im Bogenmaß) zwischen x -Achse und dem Vektor $e^{i\varphi}$ (wir betrachten $e^{i\varphi}$ wie ein Vektor in der Ebene). Daher sieht man, dass die Funktionen $\cos$ und $\sin$ mit der in der Schule übereinstimmen.

Da die Länge des Bogens mit Endpunkten $e^{i \cdot 0}$ und $e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, so gilt:

$$\text{der Umfang des Einheitskreises} = 4 \text{ mal } \frac{\pi}{2} = 2\pi,$$

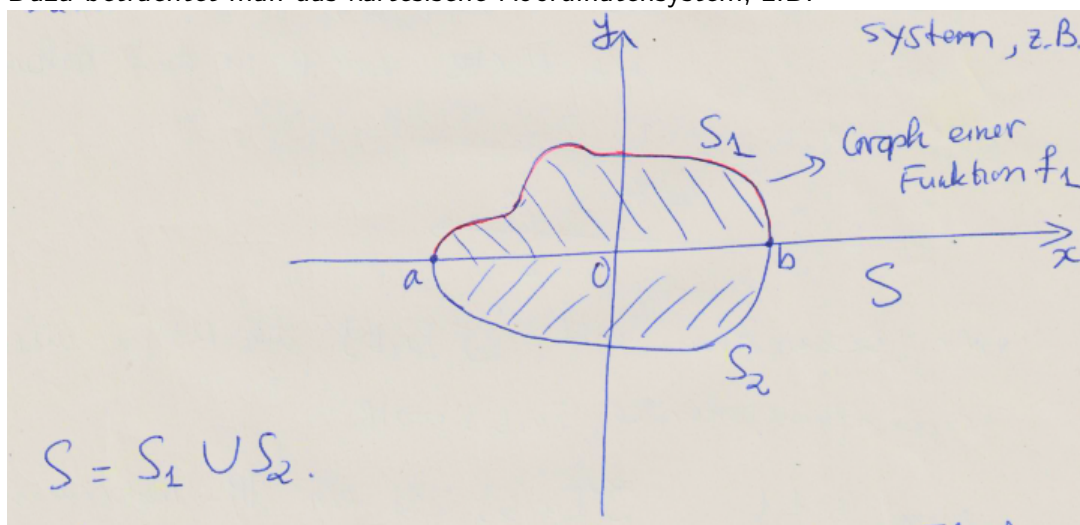
d.h. wir finden wieder die übliche Definition von π .

6 Integralrechnung

Man will Flächen in der Ebene betrachten und ihre Flächeninhalte berechnen, z.B.



Dazu betrachtet man das kartesische Koordinatensystem, z.B.



$S = S_1 \cup S_2$ und S_1, S_2 ist die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der x -Achse. Man bezeichnet den Flächeninhalt von S_1 mithilfe von f_1 . Man definiert das Integral von f_1 auf $[a, b]$, $\int_a^b f_1(x) dx$, welches dem Flächeninhalt von S_1 entspricht.

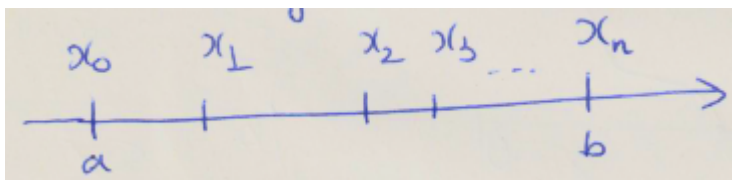
Wir beginnen mit einem einfachen Fall.

6.1 Treppenfunktionen und Riemannsches Integral

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, heißt eine Funktion $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktion, falls es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

des Intervalls $[a, b]$ gibt, so dass φ auf jedem offenen Teilintervall (x_{k-1}, x_k) ($1 \leq k \leq n$) konstant ist. Die Werte von φ in den Teilpunkten sind beliebig.



Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}[a, b]$ die Menge aller Treppenfunktionen $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Lemma 6.1.1. $\mathcal{T}[a, b]$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, d.h. die folgenden Eigenschaften sind wahr:

- 1) $0 \in \mathcal{T}[a, b]$
- 2) $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b] \implies \varphi + \psi \in \mathcal{T}[a, b]$
- 3) $\varphi \in \mathcal{T}[a, b], \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$

Beweis. 1) und 3) sind trivial. Wir zeigen 2).

Die Treppenfunktion φ sei definiert bezüglich der Unterteilung

$$Z: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

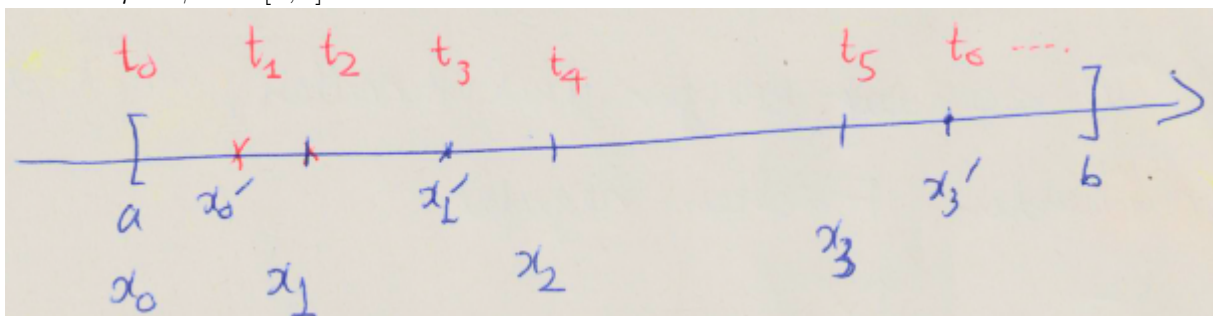
und ψ bezüglich der Unterteilung

$$Z': a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_m = b.$$

Nun sei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ diejenige Unterteilung von $[a, b]$, die alle Teilpunkte von Z und Z' enthält, d.h.

$$\{t_0, t_1, \dots, t_k\} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \cup \{x'_1, x'_2, \dots, x'_m\}.$$

Dann sind φ, ψ konstant auf jedem Teilintervall (t_{j-1}, t_j) , also ist auch $\varphi + \psi$ auf (t_{j-1}, t_j) . Deshalb $\varphi + \psi \in \mathcal{T}[a, b]$.



□

Definition 6.1.2 (Integral für Treppenfunktionen). Sei $\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$ definiert bzgl. der Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

und sei

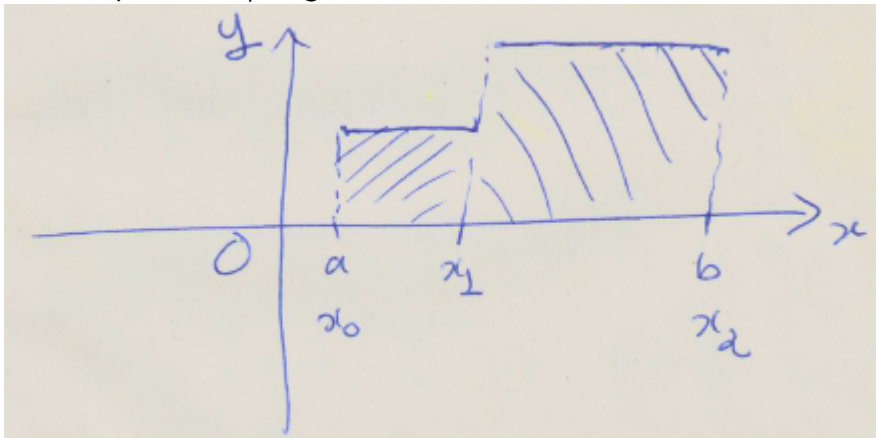
$$\varphi|_{(x_{k-1}, x_k)} = c_k \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n.$$

Dann setzt man

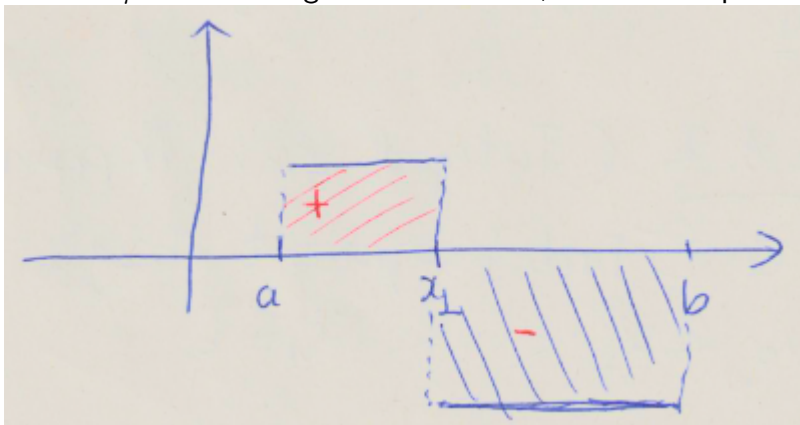
$$\int_a^b \varphi(x) dx := \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}).$$

Geometrische Deutung

Falls $\varphi \geq 0$ auf $[a, b]$, dann gilt $\int_a^b \varphi(x) dx =$ der Flächeninhalt, der zwischen der x -Achse und dem Graphen von φ liegenden Flächen.



Falls $\varphi < 0$ auf einigen Teilintervallen, sind die entsprechenden Flächen negativ.



Bemerkung 6.1.3. Damit das Integral $\int_a^b \varphi(x) dx$ einer Treppenfunktion wohldefiniert ist, muss man noch zeigen, dass die Definition unabhängig von der Unterteilung ist. Es seien

$$Z: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad Z': \quad a = t_1 < t_1 < \cdots < t_m = b$$

zwei Unterteilungen, auf deren offenen Teilintervallen φ konstant ist, und zwar sei

$$\varphi|_{(x_{j-1}, x_j)} = c_j, \quad \varphi|_{(t_{k-1}, t_k)} = c'_k.$$

Wir setzen

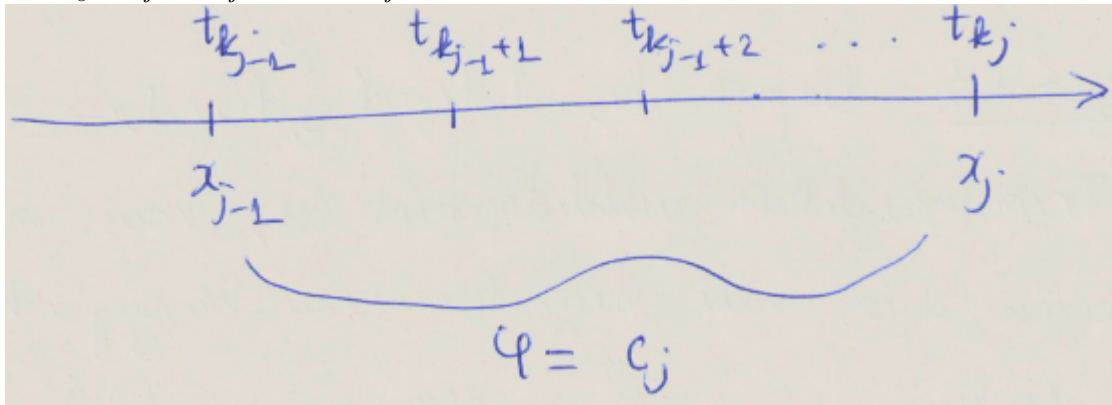
$$\int_Z \varphi := \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1}), \quad \int_{Z'} \varphi := \sum_{k=1}^m c'_k (t_k - t_{k-1}).$$

Wir müssen zeigen $\int_Z \varphi = \int_{Z'} \varphi$.

Beweis. Fall 1: Jeder Teilpunkt von Z sei auch Teilpunkt von Z' , etwa $x_j = x_{k_j}$. Dann gilt

$$x_{j-1} = t_{k_{j-1}} < t_{k_{j-1}+1} < \cdots < t_{k_j} = x_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

und $c'_s = c_j$ für $k_{j-1} < s \leq k_j$.



Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_{Z'} \varphi &= \sum_{j=1}^n \sum_{s=k_{j-1}+1}^{k_j} c'_s (t_s - t_{s-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{s=k_{j-1}+1}^{k_j} c_j (t_s - t_{s-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1}) = \int_Z \varphi. \end{aligned}$$

Fall 2: Seien Z und Z' beliebig und Z^* die Unterteilung, die alle Teilpunkte von Z und Z' umfasst. Dann gilt nach dem ersten Fall

$$\int_Z \varphi = \int_{Z^*} \varphi = \int_{Z'} \varphi.$$

□

Satz 6.1.4. Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a)

$$\int_a^b (\varphi + \psi)(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx$$

b)

$$\int_a^b (\lambda \varphi)(x) dx = \lambda \int_a^b \varphi(x) dx$$

c)

$$\varphi \leq \psi \implies \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx,$$

wobei $\varphi \leq \psi$ bedeutet: $\varphi(x) \leq \psi(x) \forall x \in [a, b]$.

Beweis. Wie in der Bemerkung 6.1.3 kann man ψ und φ bezüglich derselben Unterteilung des $[a, b]$ betrachten. Die Aussagen sind dann trivial. □

Definition 6.1.5 (Oberintegral, Unterintegral). Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion. Dann setzt man

$$\int_a^{b*} f(x) dx := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \in \mathcal{T}[a, b], \varphi \geq f \right\},$$

$$\int_a^b f(x) dx := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \in \mathcal{T}[a, b], \varphi \leq f \right\}.$$

Bemerkung. Es gilt stets

$$\int_a^{b*} f(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx.$$

Beispiel.

(1) $\forall \varphi \in \mathcal{T}[a, b]$ gilt

$$\int_a^{b*} \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

(2) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$ Dann gilt

$$\int_a^{b*} f(x) dx = 1 > 0 = \int_a^b f(x) dx.$$

(Aufgabe, Hinweis: Die Menge $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$.)

Definition 6.1.6. Eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn

$$\int_a^{b*} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

In diesem Fall setzt man

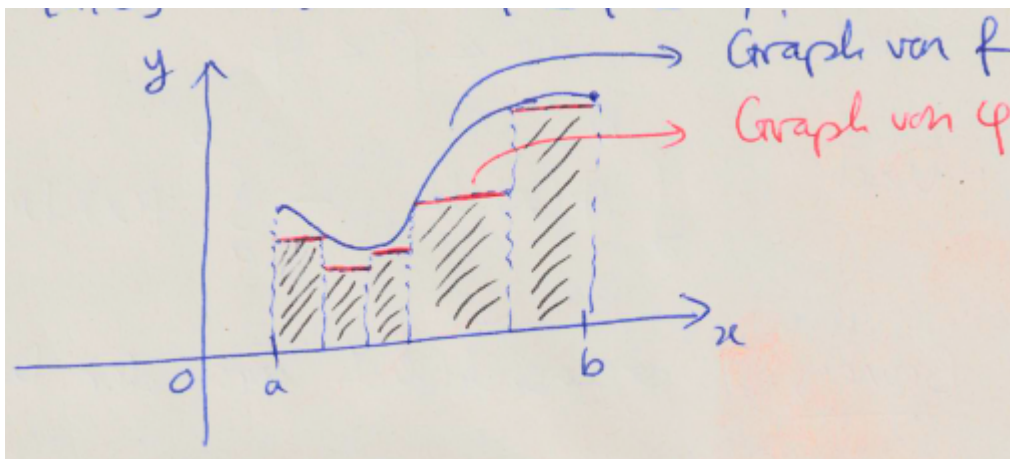
$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^{b*} f(x) dx.$$

$\int_a^b f(x) dx$ heißt das Riemannsche Integral von f (auf $[a, b]$).

Von nun an sagt man nur „Integral“, „integrierbar“ statt „Riemannsches Integral“, „Riemann-integrierbar“.

Beispiel. Treppenfunktionen sind integrierbar.

Bemerkung. Anschaulich ist $\int_a^b f(x) dx$ (für $f \geq 0$) genau der Flächeninhalt der Fläche S zwischen dem Graphen von f und der x -Achse: In der Tat nehmen wir $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$. 14

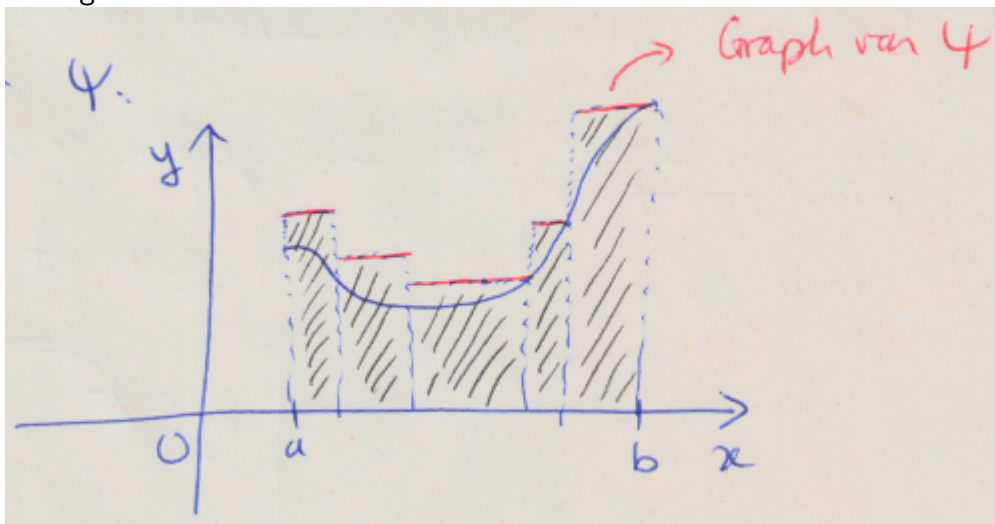


Man bemerkt

$$\text{Flächeninhalt von } S \geq \int_a^b \varphi(x) dx =: S_\varphi$$

und $S_\varphi \nearrow S$, wenn φ sich f von unten nähert.

Analog für



Wir untersuchen nun, welche Funktionen integrierbar sind.

Satz 6.1.7 (Einschließung zwischen Treppenfunktionen). *Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ existieren mit*

$$\varphi \leq f \leq \psi$$

und

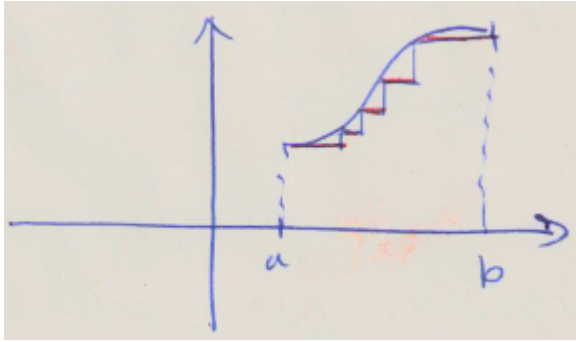
$$\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \leq \varepsilon.$$

Beweis. Offensichtlich aus der Definition der Riemannschen Integrierbarkeit. □

Satz 6.1.8. *Jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in \mathcal{T}[a, b] \forall x \in [a, b]: |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

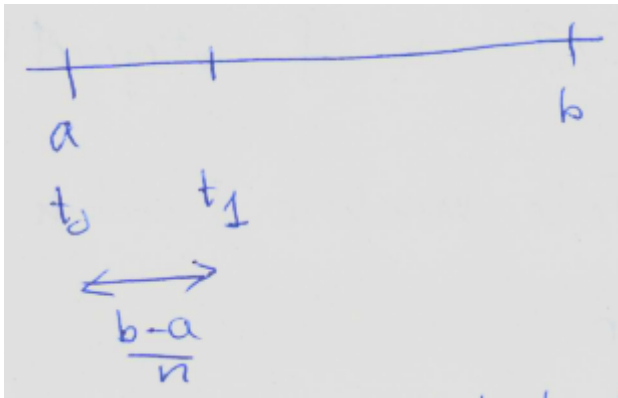


Satz 4.4.6 $\implies f$ gleichmäßig stetig. Daher $\exists \delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \forall x, x' \in [a, b], \quad |x - x'| < \delta.$$

Wähle n so groß, dass $\frac{b-a}{n} < \delta$, und setze

$$t_k := a + k \cdot \frac{b-a}{n} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n.$$



Wir erhalten so eine Unterteilung von $[a, b]$ mit $t_k - t_{k-1} < \delta \quad \forall 0 < k \leq n$.

Definiere $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) := f(t_k)$ für $t_{k-2} \leq t < t_k$, $0 < k \leq n$. Dann $\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$ und $|\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Nun setze $\psi := \varphi + \varepsilon \in \mathcal{T}[a, b]$. Man hat

$$\tilde{\varphi} := \varphi - \varepsilon \leq f \leq \varphi + \varepsilon = \psi$$

und

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x) \, dx - \int_a^b \tilde{\varphi}(x) \, dx &= \int_a^b \psi(x) \, dx + \int_a^b \varepsilon \, dx - \int_a^b \varphi \, dx + \int_a^b \varepsilon \, dx \\ &= 2 \int_a^b \varepsilon \, dx = 2\varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

Nach Satz 6.1.7 ist f integrierbar. □

Satz 6.1.9. Jede monotone Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis. Sei f monoton wachsend (für monoton fallende Funktionen ist der Satz analog zu beweisen). Sei $\varepsilon > 0$. Setze

$$x_k := a + k \cdot \frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Definiere $\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$, $\psi \in \mathcal{T}[a, b]$ durch

$$\varphi(x) := f(x_{k-1}), \quad x_{k-1} \leq x < x_k, \quad \psi(x) := f(x_k), \quad x_{k-1} \leq x < x_k.$$

Da f monoton wächst, gilt $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x) \, dx - \int_a^b \varphi(x) \, dx &= \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(x_n) - f(x_0)) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

falls n genügend groß ist. Also ist f integrierbar nach Satz 6.1.7. □

Satz 6.1.10. Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen, und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f + g$ und λf integrierbar, und es gilt:

a)

$$\int_a^b (f + g)(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

b)

$$\int_a^b (\lambda f)(x) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx$$

c)

$$f \leq g \implies \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

d) Sei $c \in (a, b)$. Dann sind $f|_{[a, c]}$ und $f|_{[b, c]}$ auch integrierbar, und es gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Beweis. a) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann $\exists \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{T}[a, b]$ mit

$$\varphi_1 \leq f \leq \psi_1, \quad \varphi_2 \leq g \leq \psi_2,$$

und

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi_1(x) \, dx - \int_a^b \varphi_1(x) \, dx &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \\ \int_a^b \psi_2(x) \, dx - \int_a^b \varphi_2(x) \, dx &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (\text{Satz 6.1.7}).$$

Es folgt

$$\varphi_1 + \varphi_2 \leq f + g \leq \psi_1 + \psi_2$$

und

$$\int_a^b (\psi_1 + \psi_2)(x) \, dx - \int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2)(x) \, dx \leq \varepsilon.$$

Daher ist $f + g$ integrierbar, und die angegebene Formel gilt.

Die Aussagen b), c), d) sind analog zu beweisen. □

Definition 6.1.11. Man setzt

$$\int_a^a f(x) \, dx := 0, \quad \int_a^b f(x) \, dx := - \int_b^a f(x) \, dx \quad \text{falls } b < a.$$

Bemerkung.

- (i) Satz 6.1.10 d) gilt nun für beliebige gegenseitige Lage von a, b, c , falls f in $[\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}]$ integrierbar ist.
- (ii) In der Notation $\int_a^b f(x) \, dx$ können auch andere Buchstaben anstelle der Integrationsvariablen x verwendet werden:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f(\xi) \, d\xi = \dots$$

Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall. Für eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die Funktionen $f_+, f_-: I \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad f_-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man bemerkt, dass es gilt

$$f = f_+ - f_- \quad \text{und} \quad |f| = f_+ + f_-.$$

Satz 6.1.12. Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt:

- i) $f_+, f_-, |f|$ sind integrierbar, und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

- ii) $\forall p \in [1, \infty)$ ist $|f|^p$ integrierbar.

- iii) $fg: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar (f mal g).

Beweis. Zu i): Nach Voraussetzung $\exists$ zu $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\int_a^b (\psi - \varphi)(x) \, dx \leq \varepsilon.$$

Dann sind auch φ_+ und ψ_+ Treppenfunktionen mit $\varphi_+ \leq f_+ \leq \psi_+$ und

$$\int_a^b (\psi_+ - \varphi_+)(x) \, dx \leq \int_a^b (\psi - \varphi)(x) \, dx \leq \varepsilon,$$

also ist f_+ integrierbar. Die Integrierbarkeit von f_- beweist man analog.

Nach Satz 6.1.10 ist daher $|f|$ auch integrierbar, und die Integral-Abschätzung gilt, da $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$.

Zu ii): Erinnerung, dass f beschränkt ist, d.h. $|f| \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}$.

Betrachte $\frac{|f|}{M}$ anstelle von f , kann man annehmen, dass $0 \leq f \leq 1$.

Dann zu $\varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ mit

$$0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$$

und

$$\int_a^b (\psi - \varphi)(x) \, dx \leq \frac{\varepsilon}{p}.$$

Es folgt: φ^p, ψ^p sind auch Treppenfunktionen mit $\varphi^p \leq f^p \leq \psi^p$.

Beachte

$$|\psi^p - \varphi^p| = |(\psi - \varphi)(\psi^{p-1} + \psi^{p-2}\varphi + \dots + \varphi^{p-1})| \leq p|\psi - \varphi|.$$

Deshalb gilt

$$\int_a^b (\psi^p - \varphi^p)(x) \, dx \leq p \int_a^b (\psi - \varphi)(x) \, dx \leq \varepsilon,$$

also f^p integrierbar.

Zu iii): Die Behauptung folgt aus ii), denn

$$fg = \frac{1}{4} ((f+g)^2 - (f-g)^2).$$

□

Satz 6.1.13 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Sei $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-negative, integrierbare Funktion. Dann gibt es zu jeder stetigen Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein $\xi \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) \, dx.$$

Im Spezialfall $\varphi \equiv 1$ hat man

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(\xi)(b-a) \text{ für ein } \xi \in [a, b].$$

Beweis. Nach Satz 6.1.12 ist $f\varphi$ wieder integrierbar. Wir setzen

$$m := \min_{[a,b]} f, \quad M := \max_{[a,b]} f.$$

Dann gilt $m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi$. Es folgt

$$m \int_a^b \varphi(x) \, dx \leq \int_a^b (f\varphi)(x) \, dx \leq M \int_a^b \varphi(x) \, dx.$$

Daraus folgt

$$\exists \mu \in [m, M]: \int_a^b f(x)\varphi(x) \, dx = \mu \int_a^b \varphi(x) \, dx.$$

Zwischenwertsatz liefert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \mu$. Daher folgt die Behauptung.

□

6.2 Stammfunktionen

Wir entwickeln nun eine Methode, um Integrale zu berechnen. Wir sehen bald, dass die Integration die Umkehrung der Differentiation ist.

Satz 6.2.1. Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in I$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall). Für $x \in I$ sei

$$F(x) := \int_a^x f(t) \, dt.$$

Dann ist $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt $F' = f$.

Beweis. Für $h \neq 0$ gilt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) \, dt.$$

Nach Satz 6.1.13 $\exists \xi_h \in [x, x+h]$ (bzw. $\xi_h \in [x+h, x]$ falls $h < 0$) mit

$$\int_x^{x+h} f(t) \, dt = h \cdot f(\xi_h).$$

Da $\lim_{h \rightarrow 0} \xi_h = x$ und f stetig ist, folgt

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(h \cdot \frac{1}{h} \cdot f(\xi_h) \right) = f(x).$$

□

Definition 6.2.2. Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion (oder unbestimmtes Integral) von f , falls $F' = f$.

Satz 6.2.3. Sei $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Eine weitere Funktion $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Stammfunktion von f , wenn $F - G$ eine Konstante ist.

Beweis. Direkt aus Folgerung 5.3.1. □

Satz 6.2.4 (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung). Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Dann gilt $\forall a, b \in I$

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Beweis. Man setzt

$$F_0(x) := \int_a^x f(t) \, dt.$$

Dann ist F_0 eine Stammfunktion von f . Nach Satz 6.2.3 ist $F - F_0 = c$ (Konstante). Deshalb ist

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t) \, dt.$$

□

Bezeichnung. Setze

$$F(x)\big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Daher gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x)\big|_a^b.$$

Im Blick auf diese Formel schreibt man

$$F = \int f(x) \, dx = \int f \, dx \quad \text{auf } I$$

(ohne Angabe von Grenzen beim Integralzeichen). Man muss aber vorsichtig sein, wenn man diese Schreibweise benutzt: Aus $\int f \, dx = F$ und $\int f \, dx = G$ folgt nicht $F = G$, sondern lediglich $F = G + c$, wobei c eine Konstante ist.

Beispiel.

- i) $\alpha \neq -1, \int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (x > 0)$
- ii) $\int \frac{dx}{x} = \log |x| \quad (x \neq 0)$
- iii) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$
- iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \quad I = (-1, 1)$
- v) $\int \sin x \, dx = -\cos x$
- vi) $\int \cos x \, dx = \sin x$
- vii) $\int e^x \, dx = e^x$

Satz 6.2.5 (Substitutionsregel). Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\varphi([a, b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx.$$

Beweis. Sei $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Für $F \circ \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt nach der Kettenregel

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

Daraus folgt nach Satz 6.2.4

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = (F \circ \varphi)(t)\big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx.$$

□

Beispiel.

(i)

$$\int_a^b f(t+c) \, dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x) \, dx \quad (\varphi(t) := t+c)$$

(ii) Für $c \neq 0$ gilt

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x) dx \quad (\varphi(t) = ct).$$

Satz 6.2.6 (Partielle Integration). Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx.$$

Beweis. Setze $F = f - g$. Man hat

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Daher nach Satz 6.2.4

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx = F(x)\Big|_a^b = f(x)g(x)\Big|_a^b$$

woraus die Behauptung folgt. □

Beispiel.

(i) Seien $a, b > 0$. Wir berechnen $\int_a^b \log x dx$.

Setze

$$f(x) = \log x, \quad g(x) = x,$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad g'(x) = 1.$$

$$\int_a^b \log x dx = \int_a^b f(x)g'(x) dx = x \log x\Big|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\log x - 1)\Big|_a^b$$

(ii) Wir berechnen $I_m := \int \sin^m x dx$ ($m \in \mathbb{N}_0$), d.h. wir bestimmen eine Stammfunktion von $\sin^m x$.

Satz 6.2.6 lässt sich umschreiben wie

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx.$$

Satz 6.2.6 liefert für $m \geq 2$

$$\begin{aligned} I_m &= - \int \sin^{m-1} x (\cos x)' dx \\ &= - \cos x \sin^{m-1} x + (m-1) \int \cos^2 x \sin^{m-2} x dx \\ &= - \cos x \sin^{m-1} x + (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man nach I_m auflösen und erhält

$$I_m = -\frac{1}{m} \cos x \sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

Bemerke

$$I_0 = \int \sin^0 x dx = x, \quad I_1 = \int \sin x dx = -\cos x$$

kann man rekursiv I_m berechnen.

Aus vorangegangenen Berechnungen gilt für $A_m := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx$:

$$A_m = -\frac{1}{m} \cos x \sin^{m-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{m-1}{m} A_{m-2} = \frac{m-1}{m} A_{m-2} \quad \text{für } m \geq 2$$

und $A_0 = \frac{\pi}{2}$, $A_1 = 1$. Man erhält

$$A_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad A_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 5 \cdot 3}.$$

Insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1,$$

$$\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = \frac{2n \cdot 2n \dots 4 \cdot 2 \cdot 2}{(2n-1)(2n-1)\dots 3 \cdot 3 \cdot 1} \cdot \frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2-1} \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Wegen

$$\sin^{2n+2} x \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x$$

für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt

$$A_{2n+2} \leq A_{2n+1} \leq A_{2n}.$$

Folglich

$$\underbrace{\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \leq \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} \leq 1.$$

Daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = 1.$$

Man erhält

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2-1} \cdot \frac{2}{\pi} \right) = 1.$$

Anders gesagt gilt

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2-1}. \quad (\text{Wallis'sches Produkt})$$

Sammlung der Definitionen

1.1.1 Definition	6
1.2.1 Definition	8
1.2.3 Definition	9
1.2.4 Definition (Vorzeichen und Absolutbetrag)	10
1.3.1 Definition	11
1.3.3 Definition	12
1.3.4 Definition	12
1.4.1 Definition	13
1.4.2 Definition	14
1.4.6 Definition (natürliche Potenzen)	16
1.4.7 Definition (ganzzahlige Potenzen)	16
1.4.9 Definition	17
1.4.10 Definition	17
1.4.11 Definition	18
1.5.4 Definition (Gauß-Klammer)	21
1.5.7 Definition (rationale Potenzen)	23
1.5.8 Definition	24
1.5.10 Definition (Intervallschachtelung)	24
1.6.1 Definition	26
1.7.3 Definition	29
1.7.4 Definition	29
1.7.6 Definition	29
2.1.1 Definition	31
2.1.2 Definition	32
2.1.4 Definition	34
2.3.1 Definition	38
2.3.5 Definition	41
2.3.7 Definition	41
2.4.1 Definition	42
2.4.3 Definition	43
2.4.6 Definition	44
3.1.1 Definition	46
3.3.1 Definition	49
3.3.8 Definition	54
3.4.1 Definition	54
3.4.4 Definition	55
4.1.1 Definition (ε - δ -Definition der Stetigkeit)	57
4.1.3 Definition	58
4.1.10 Definition	61
4.2.1 Definition	62
4.2.2 Definition	62
4.2.3 Definition	62
4.3.3 Definition	65
4.4.1 Definition	67
4.4.2 Definition	67
4.4.5 Definition	68

4.5.1 Definition	69
4.5.3 Definition	70
4.5.4 Definition	70
4.5.9 Definition (Einseitige Grenzwerte)	74
5.1.1 Definition	75
5.2.1 Definition	79
5.2.2 Definition	79
5.4.3 Definition	87
6.1.2 Definition (Integral für Treppenfunktionen)	91
6.1.5 Definition (Oberintegral, Unterintegral)	94
6.1.6 Definition	94
6.1.11 Definition	98
6.2.2 Definition	100

Sammlung der Sätze und Lemmata

1.1.3 Satz	7
1.2.2 Satz (Rechenregeln für Ungleichungen)	8
1.2.5 Satz (Rechenregeln)	10
1.3.5 Satz (Existenz von $\mathbb{R}$)	12
1.3.6 Satz (Eindeutigkeit des Körpers der reellen Zahlen)	12
1.4.3 Satz (Induktionsprinzip)	14
1.4.4 Satz (Beweis durch vollständige Induktion)	14
1.4.8 Satz (Bernoullische Ungleichung)	17
1.4.12 Satz (Binomischer Lehrsatz)	19
1.5.1 Satz (Satz von Archimedes)	20
1.5.2 Satz (Satz von Eudoxus)	21
1.5.3 Satz (Wohlordnungsprinzip)	21
1.5.5 Satz (Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)	21
1.5.6 Satz (Existenz der k -ten Wurzel)	21
1.5.12 Satz (Intervallschachtelungsprinzip)	24
1.5.12 Satz	25
1.6.2 Satz	26
1.6.3 Satz	27
1.6.4 Satz	27
1.7.1 Satz	28
1.7.2 Satz	28
1.7.5 Satz (Rechenregeln)	29
1.7.7 Satz (Rechenregeln für den Betrag)	29
2.1.3 Satz	33
2.1.5 Satz (Monotonieprinzip)	35
2.1.7 Satz	36
2.2.1 Satz	36
2.2.2 Satz	37
2.2.4 Satz (Einschließungsprinzip)	38
2.3.2 Satz	39
2.3.3 Satz (Satz von Bolzano-Weierstraß)	39
2.3.6 Satz (Cauchy-Kriterium)	41
2.4.2 Satz	43
2.4.4 Satz (Cauchy-Kriterium in $\mathbb{C}$)	44
2.4.5 Satz (Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$)	44
3.1.2 Satz (Rechenregeln)	46
3.2.1 Satz (Cauchy-Kriterium)	46
3.2.3 Satz (Majorantenkriterium)	47
3.2.4 Satz (Minorantenkriterium)	47
3.2.5 Satz (Monotoniekriterium)	47
3.2.6 Satz	48
3.3.2 Satz (Wurzelkriterium)	50
3.3.3 Satz (Quotientenkriterium)	50
3.3.5 Satz (Cauchy-Produkt)	52
3.3.7 Satz	54
3.4.2 Lemma	54

3.4.3 Satz	55
3.4.5 Satz	55
4.1.4 Satz	59
4.1.5 Satz	60
4.1.7 Satz	60
4.1.9 Satz (Stetigkeit der Umkehrfunktion)	61
4.2.4 Satz	62
4.2.5 Satz	62
4.2.6 Satz	63
4.3.1 Satz (Zwischenwertsatz)	64
4.3.2 Satz	65
4.3.4 Satz	66
4.3.5 Satz	66
4.4.3 Satz	67
4.4.6 Satz	68
4.5.2 Lemma	69
4.5.7 Satz (Folgenkriterium)	72
4.5.10 Satz	75
5.1.3 Satz	76
5.1.4 Satz (Ableitungsregeln)	76
5.1.6 Satz (Kettenregel)	77
5.1.7 Satz	78
5.2.3 Satz (Notwendiges Extremwertkriterium)	80
5.2.4 Satz (Rolle)	81
5.2.5 Satz (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)	81
5.2.6 Satz	81
5.3.5 Satz (Schranksatz)	84
5.3.6 Satz (Regel von l'Hospital)	84
5.4.1 Lemma	87
5.4.2 Lemma	87
5.4.4 Satz	89
6.1.1 Lemma	91
6.1.4 Satz	93
6.1.7 Satz (Einschließung zwischen Treppenfunktionen)	95
6.1.8 Satz	95
6.1.9 Satz	96
6.1.10 Satz	97
6.1.11 Satz	98
6.1.13 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)	99
6.2.1 Satz	100
6.2.3 Satz	100
6.2.4 Satz (Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung)	100
6.2.5 Satz (Substitutionsregel)	101
6.2.6 Satz (Partielle Integration)	102

Index

- Ableitung, 75
 - erste, 75
 - zweite, 83
- Ableitungsregeln, 76
- absolut konvergente Reihe, 49
- Additionsformel, 18
- alternierend harmonische Reihe, 49
- alternierende Reihe, 49
- Antisymmetrie, 10
- Archimedes, 20
- Argument, 89
- arithmetisches Mittel, 10, 23
- Assoziativgesetz, 6
- Aufzählung, 26

- Bernoullische Ungleichung, 17
- beschränkte Folge, 44
- beschränkte Funktion, 62
- beschränkte Menge, 44
- Beschränktheit, 34, 67
- bestimmte Divergenz, 42, 46
- Bijektivität, 4
- Binomialkoeffizienten, 18
- Binomischer Lehrsatz, 19

- Cauchy-Folge, 41, 44
- Cauchy-Hadamard, 55
- Cauchy-Kriterium, 41, 46
- Cauchy-Produkt, 52
- Cosinus-Funktion, 56

- Dichtheit, 21
- Differenzmenge, 1
- disjunkt, 2
- Divergenz, 32, 43, 46
- Dreiecksungleichung, 29
 - umgekehrte, 30
- Dreiecksungleichungen, 10

- Einschließungsprinzip, 38
- einseitiger Grenzwert, 74
- erweiterte Zahlenebene, 44
- Eudoxus, 21
- Eulersche Zahl, 25
- Exponentialfunktion, 51
- Exponentialfunktion zur Basis x , 65
- Exponentialreihe, 51
- Extremum, 79

- Fakultät, 18
- Fallen
 - streng monotonen, 61
- Familie von Elementen, 17
- Folge, 31
- Folgenkriterium, 72
- Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, 100

- ganzzahlige Potenz, 16
- Gauß-Klammer, 21
- geometrische Reihe, 46
- geometrisches Mittel, 23
- Gleichmächtigkeit, 26
- gleichmäßige Stetigkeit, 68
- Glieder, 46
- globales Maximum, 79
- globales Minimum, 79
- Grenzfunktion, 62
- Grenzwert, 32, 43

- harmonische Reihe, 48, 49
- Häufungspunkt, 69
 - linksseitiger, 74
 - rechtsseitiger, 74
- Häufungswert, 38, 43

- imaginäre Einheit, 29
- Imaginärteil, 29
- Indexmenge, 17
- Induktionsbehauptung, 15
- Induktionsvoraussetzung, 15
- Infimum, 11
- Injektivität, 4
- innerer Punkt, 79
- Integral, 90
 - unbestimmtes, 100
- Intervall, 24
- Intervallschachtelung, 24
- Intervallschachtelungsprinzip, 24
- isolierter Punkt, 70

- Kardinalzahl, 26
- Kettenregel, 77
- Koeffizienten, 54
- Kommutativgesetz, 6
- komplexe Potenz, 54
- konvergent, 43

Konvergenz, 31, 46
 punktweise, 62
 Konvergenzkreis, 55
 Konvergenzradius, 55
 kritischer Punkt, 79

 l'Hospital, 84
 Leibniz-Kriterium, 48
 Limes, 32, 43
 Limes Inferior, 40
 Limes Superior, 40
 lokales Maximum, 79
 lokales Minimum, 79

 Majorante, 47
 Majorantenkriterium, 47
 Maximalstelle, 67
 Maximum, 11, 67
 globales, 79
 lokales, 79
 Menge
 ganze Zahlen, 14
 induktiv, 13
 irrationale Zahlen, 14
 natürliche Zahlen, 13
 rationale Zahlen, 14
 Minimalstelle, 67
 Minimum, 11, 67
 globales, 79
 lokales, 79
 Minorantenkriterium, 47
 Mittelwertsatz der Integralrechnung, 99
 monoton fallend, 35
 monoton wachsend, 35
 monotone Steigung, 61
 monotones Fallen, 61
 monotones Wachstum, 61
 Monotonieprinzip, 35

 nach oben beschränkt, 67
 nach unten beschränkt, 67
 Negation, 2
 neutrales Element, 6
 normal konvergent, 62
 Nullfolge, 32

 Oberintegral, 94
 Ordnungsrelation, 9

 Partialsumme, 46

 Partielle Integration, 102
 Potenzfunktion zum Exponenten z , 65
 Potenzgesetze, 16, 23, 65
 Potenzreihe, 54
 punktweise Konvergenz, 62

 Quotientenkriterium, 50

 rationale Potenz, 23
 Realteil, 29
 Rechenregeln für Ungleichungen, 8
 Reflexivität, 10
 Reihe, 46
 absolut konvergente, 49
 alternierend harmonische, 49
 alternierende, 49
 harmonische, 49
 Rekursionsformel, 18
 Riemann-Integrierbarkeit, 94
 Riemannsches Integral, 94
 Rolle, 81

 Sattelpunkt, 79
 Schnittmenge, 1
 Schranke
 größte untere, 11
 kleinste obere, 11
 Sekante, 76
 Sinus-Funktion, 56
 Stammfunktion, 100
 Steigung
 monoton, 61
 streng monotone, 61
 stereographische Projektion, 45
 stetig differenzierbar, 84
 stetige Fortsetzung, 71
 Stetigkeit, 57
 streng monoton steigend, 61
 Substitutionsregel, 101
 Summe, 46
 Supremum, 11
 Supremumsnorm, 62
 Surjektivität, 4

 Teilfolge, 38
 total angeordnet, 8
 Transitivität, 8, 10
 Treppenfunktion, 90

 Umgebung, 32, 43

unbeschränkt, [62](#)
unbestimmte Divergenz, [42](#)
unbestimmtes Integral, [100](#)
uneigentlicher Grenzwert, [42](#)
uneigentlicher Häufungspunkt, [69](#)
Unterintegral, [94](#)

Vereinigungsmenge, [1](#)

Wallis'sches Produkt, [103](#)
Wohlordnungsprinzip, [21](#)
Wurzelkriterium, [50](#)

zweite Ableitung, [83](#)
Zwischenwertsatz, [64](#)

Überabzählbarkeit, [26](#)